

Mathématiques

Pour préparer l'entrée en seconde au lycée Arago

Corrigé

Partie 1 : Calcul numérique – Calcul littéral

EX 1.1 Q.C.M Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Déterminer la bonne réponse.

Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La somme $\frac{1}{2} + \frac{3}{7}$ est égale à	$\frac{4}{9}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{13}{27}$
Le nombre $\frac{42}{54}$ est égal à	$\frac{2}{5}$	$\frac{42+1}{54+1}$	$\frac{7}{9}$
Le nombre -3^4 est égal à	$-(3) \times (3) \times (3) \times (3)$	-3×4	$-3 \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
La différence $\frac{5}{6} - \frac{4}{5}$ est égale à	$-\frac{4}{6}$	1	$\frac{1}{30}$
$10^{-5} \times 10^2$ est égal à	10^{-10}	0,001	10^3
Si $x = 8$ alors $x^2 - 5x - 4$ est égal à	47	20	-38
L'écriture scientifique de 170000 est	17×10^4	$1,7 \times 10^4$	$1,7 \times 10^5$
L'expression développée de $(4x-3)(x-5)$ est	$4x^2+15$	$4x^2-23x+15$	$4x^2+23x+15$
L'expression factorisée de $(x+5)^2+(x+5)(2x-3)$ est	$(x+5)(2x^2+15)$	$(x+5)(3x+2)$	$(x+5)(x+8)$
L'expression factorisée de $25 - 9x^2$ est	$16x^2$	$(5-9x)(5+9x)$	$(5-3x)(5+3x)$

EX 1.2 Calcul numérique

1. Calculer les expressions suivantes en donnant le résultat sous forme d'un nombre entier ou d'un nombre décimal :

$A = 1 + (7 - 3)^2$ $A = 1 + 4^2$ $A = 1 + 16$ $A = 17$	$B = 2 \times 10^5 \times 7 \times 10^{-6}$ $B = 14 \times 10^{-1}$ $B = 1,4$	$C = 3(4 - 5)^2 - 3$ $C = 3 \times (-1)^2 - 3$ $C = 3 - 3$ $C = 0$	$D = \frac{7 \times 10^7}{10^9}$ $D = 7 \times 10^{7-9}$ $D = 7 \times 10^{-2}$ $D = 0,07$
--	---	---	---

2. Ecrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible :

$E = 10 - 8 \times \frac{2}{3}$ $E = 10 - \frac{16}{3}$ $E = \frac{30 - 16}{3}$ $E = \frac{14}{3}$	$F = (10 - 8) \times \frac{2}{3}$ $F = 2 \times \frac{2}{3}$ $F = \frac{4}{3}$	$G = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$ $G = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} + \frac{1}{30}$ $G = \frac{12}{30}$ $G = \frac{2}{5}$
---	--	--

EX 1.3 Calcul en situation

Quatre personnes découvrent un trésor et le partage se fait de la façon suivante : la 1^{ère} personne prend un quart du trésor, la deuxième un tiers, la troisième $\frac{1}{5}$ et la dernière personne reçoit le reste soit 117 pièces d'or.

1. Prouve que la part de la quatrième personne représente $\frac{13}{60}$ du trésor.

$$\text{part 4ème personne} = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 1 - \left(\frac{15}{60} + \frac{20}{60} + \frac{12}{60}\right) = \frac{60}{60} - \frac{47}{60} = \frac{13}{60}$$

2. Dédus-en que le trésor contenait 540 pièces d'or.

Les 117 pièces d'or représentent $\frac{13}{60}$ du total.

$$\frac{117}{\frac{13}{60}} = 9 \quad \frac{1}{60} \text{ du total représente } 9 \text{ pièces.}$$

$$9 \times 60 = 540 \quad \text{Le trésor contenait 540 pièces d'or.}$$

3. Quels sont les nombres de pièces obtenus par chacune des personnes ?

$$540 \times \frac{1}{4} = 135 \quad ; \quad 540 \times \frac{1}{3} = 180 \quad ; \quad 540 \times \frac{1}{5} = 108$$

La 1^{ère} personne reçoit 135 pièces d'or, la deuxième 180 pièces et la troisième 108 pièces.

EX 1.4 Calcul littéral et résolution d'équation

1. Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (2x + 3)(3x - 7)$ $A = 6x^2 - 14x + 9x - 21$ $A = 6x^2 - 5x - 21$	$B = -4(1 - 5x)$ $B = -4 + 20x$	$C = 6 - 4(1 - 5x)$ $C = 6 - 4 + 20x$ $C = 2 + 20x$
--	------------------------------------	---

2. Factoriser les expressions suivantes :

$D = x^2 + 5x$ $D = x(x + 5)$	$E = 15x - 35y$ $E = 5 \times 3x - 5 \times 7y$ $E = 5(3x - 7y)$	$F = 4(x + 1) - x(x + 1)$ $F = (x + 1)(4 - x)$	$G = 81x^2 - 16$ $G = (9x)^2 - 4^2$ $G = (9x + 4)(9x - 4)$
----------------------------------	--	---	--

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $5x - 30 = 5$

$$\Leftrightarrow 5x = 35$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

$$S = \{7\}$$

b) $-4x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -4x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$$

c) $4x - 8 = x - 7$

$$\Leftrightarrow 3x - 8 = -7$$

$$\Leftrightarrow 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

d) $(2x - 5)(x + 9) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -9$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad x = -9$$

$$S = \left\{\frac{5}{2}; -9\right\}$$

e) $x(5x - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 5x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{6}{5}$$

$$S = \left\{0; \frac{6}{5}\right\}$$

f) $4x^2 - 49 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 - 7^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 7)(2x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 7 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = -7 \quad \text{ou} \quad 2x = 7$$

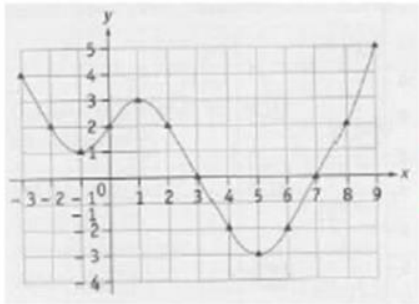
$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right\}$$

Partie 2 : Comprendre et utiliser la notion de fonction

EX 2.1

QCM (il peut y avoir plusieurs réponses exactes)

		A	B	C	D										
1	Soit g la fonction telle que : $g(x) = \frac{x+2}{x}$	$g(-4) = \frac{-2}{-4}$	$g(-4) = -\frac{1}{2}$	$g(-4) = \frac{1}{2}$	$g(-4) = \frac{3}{2}$										
2	Soit h la fonction telle que :	L'image de 4 est 8	L'image de 0 est 2	L'image de 8 est 4	L'image de 2 est 0										
3	$h: x \mapsto x(x-2)$. Par cette fonction :	-3 est un antécédent de 15	195 est un antécédent de 15	5 est un antécédent de 15	15 est un antécédent de 15										
4	Soit le tableau de valeurs d'une fonction k :	L'image de -1 est 1	L'image de 0 est 1	L'image de 1 est -1	L'image de 1 est 1										
5	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td>$k(x)$</td> <td>-2</td> <td>1</td> <td>-2</td> <td>0</td> </tr> </table> Par cette fonction :	x	-1	0	1	-2	$k(x)$	-2	1	-2	0	1 est un antécédent de -2	-1 est un antécédent de -2	-2 est un antécédent de 1	1 est l'antécédent de -2
x	-1	0	1	-2											
$k(x)$	-2	1	-2	0											
6	Voici la représentation graphique d'une fonction f pour x compris entre -3 et 9	L'image de 2 par la fonction f est 2.	L'image de 0 par la fonction f est 2.	L'image de 0 par la fonction f est 3.	L'image de 3 par la fonction f est 0.										
7		8 est un antécédent de 2 par f	2 est un antécédent de 2 par f	0 est un antécédent de 2 par f	4 est un antécédent de -2 par f										

EX 2.2

Pour cet exercice, répondre sur le sujet.

Un cycliste effectue une descente sur une route sinueuse. La courbe ci-contre représente, pour une durée d'une minute, la fonction f qui, à chaque instant, associe la vitesse affichée par le compteur.

Les valeurs demandées seront données avec la précision que permet la représentation graphique.

1. Quelle est la vitesse du cycliste au bout d'une minute ?

La vitesse au bout d'une minute est d'environ 65 km/h

2. a) Compléter $f(50) = \dots\dots$

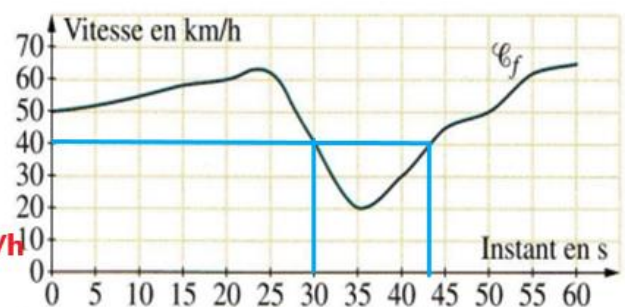
b) Que signifie ce résultat en pratique pour le cycliste ?

Cela signifie qu'à 50 secondes, la vitesse est de 50 km/h.

3. Compléter : a) l'image de 30 par la fonction f est **.40.** b) $f(\dots\dots) = 20$

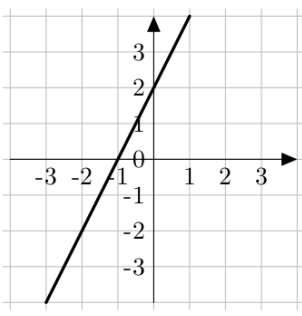
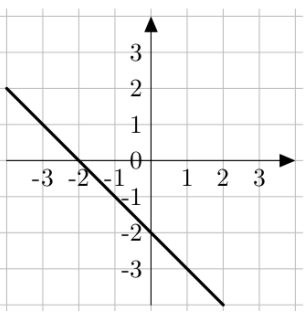
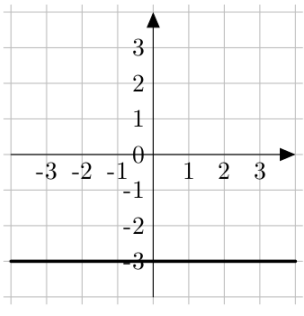
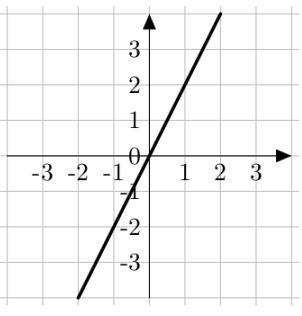
4. Quels sont les antécédents de 40 (on fera en bleu sur le graphique les tracés nécessaires) :

Les antécédents de 40 sont 30 et 43.



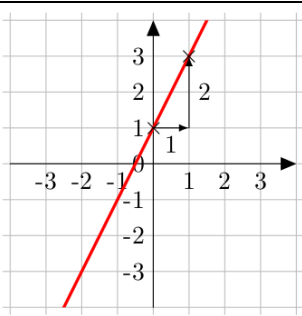
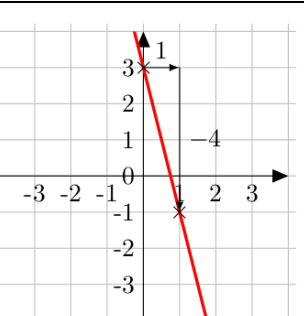
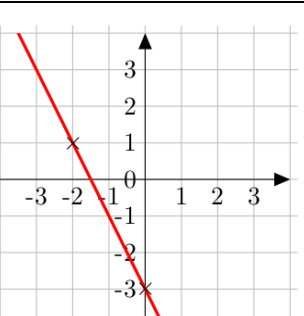
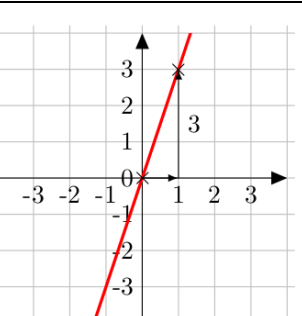
EX 2.3

Déterminer graphiquement l'expression de la fonction affine dont on a tracé la courbe :

			
$f(x) = 2x + 2.$	$f(x) = -x - 2.$	$f(x) = -3.$	$f(x) = 2x.$

EX 2.4

Construire la droite représentant chaque fonction affine :

			
$f(x) = 2x + 1$	$f(x) = -4x + 3$	$f(x) = -2x - 3$ $f(-2) = 1 ; f(0) = -3$ La droite passe par les points de coordonnées (0 ; -3) et (-2; 1).	$f(x) = 3x$

EX 2.5

Fonction f : la fonction f est linéaire.

Le coefficient directeur est égal à 2

L'expression de f est $f(x) = 2x$

Fonction g : la fonction g est affine.

Le coefficient directeur est -1 donc la fonction est de la forme $g(x) = -x + b$.

On ne peut pas lire l'ordonnée à l'origine sur le graphique mais comme $g(-3) = 0$, on déduit que :

$$-(-3) + b = 0$$

$$3 + b = 0$$

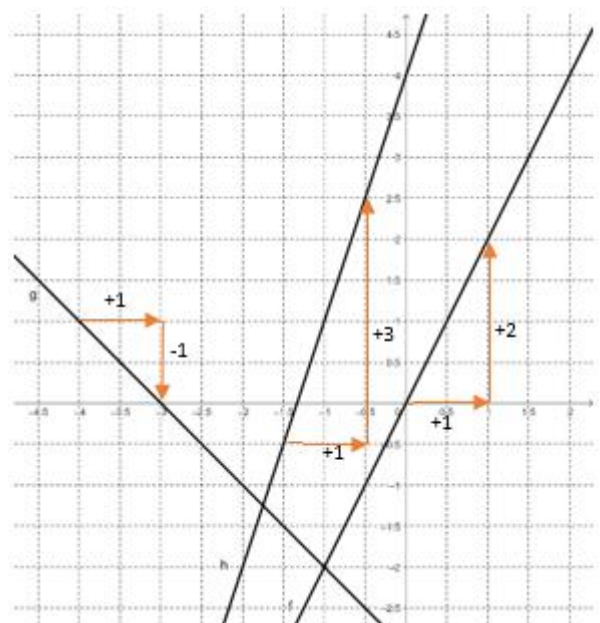
$$\text{Donc } b = -3$$

Ainsi, g est définie par $g(x) = -x - 3$

Fonction h : la fonction h est affine.

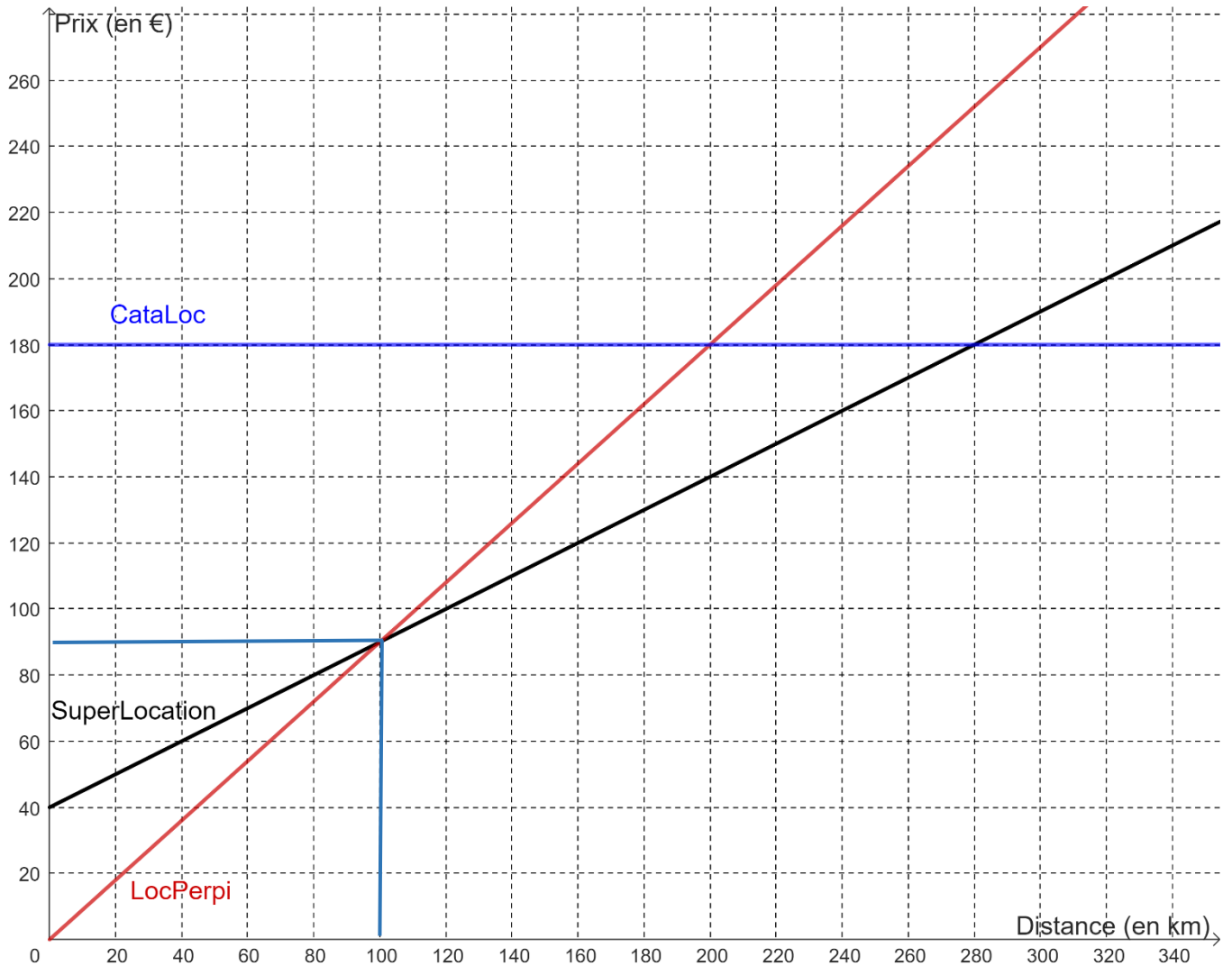
Le coefficient directeur est 3 et l'ordonnée à l'origine est 4

donc la fonction h est définie par $h(x) = 3x + 4$



EX 2.6

- 1) Avec le tarif de SuperLocation : $40 + 0.50 \times 90 = 85\text{€}$
 Avec le tarif de LocPerpi : $0,90 \times 90 = 81\text{€}$
 Avec le tarif de Cataloc : 180€
 Le tarif le plus avantageux est celui de LocPerpi.
- 2) Avec le tarif de SuperLocation : $40 + 0.50 \times 240 = 160\text{€}$
 Avec le tarif de LocPerpi : $0,90 \times 240 = 216\text{€}$
 Avec le tarif de Cataloc : 180€
 Le tarif le plus avantageux est celui de Superlocation.
- 3) a)



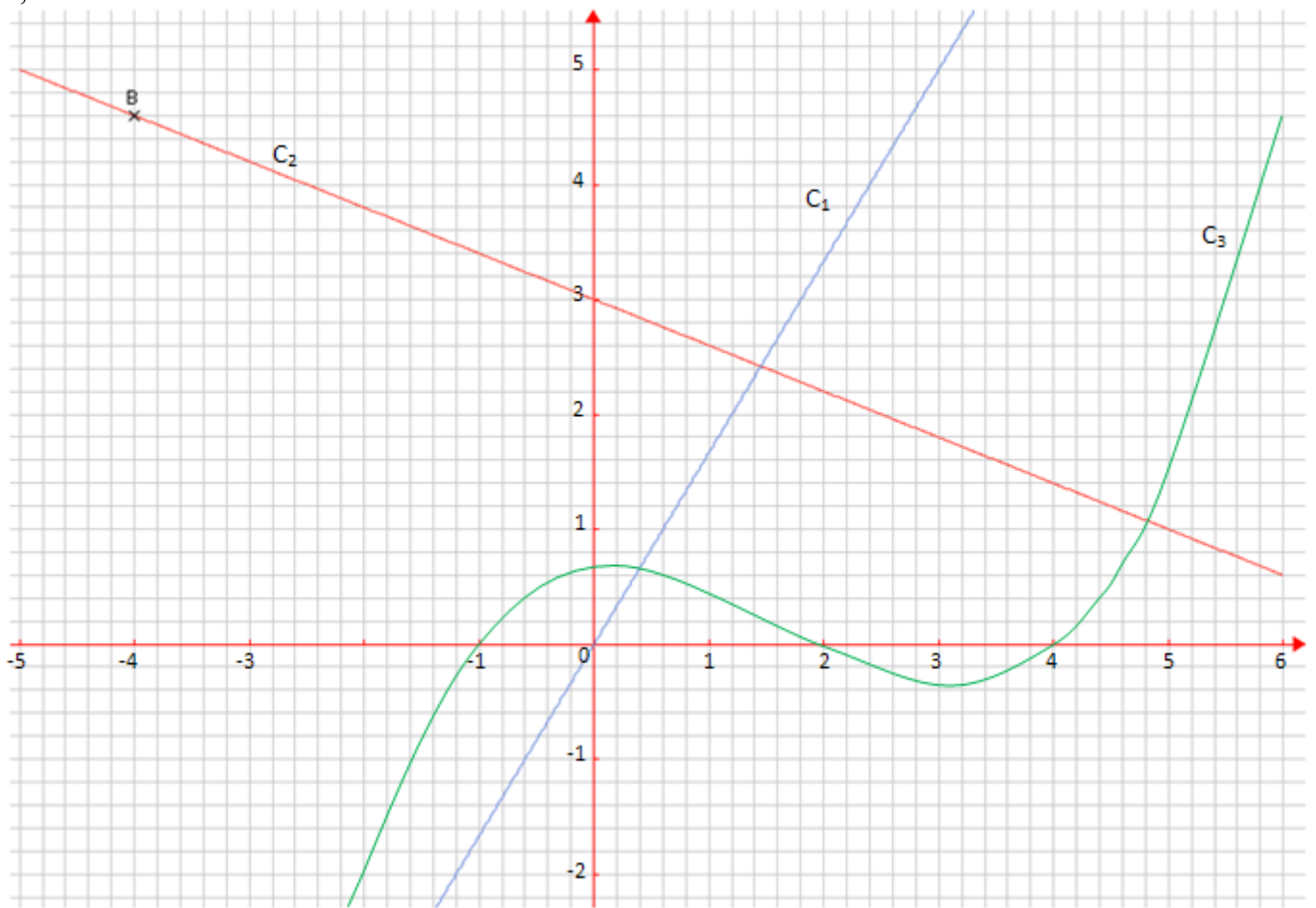
b) Pour 100km parcourus, les tarifs de SuperLocation et Locperpi sont égaux.

c)

Distance (en km)	Entre 0 et 100 km	Entre 100 et 280km	Entre 280 et 340km
Entreprise la plus avantageuse	LocPerpi	Superlocation	Cataloc

EX 2.7

On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions. Ces représentations sont nommées C_1 , C_2 et C_3 .



- 1) $B(-4; 4,6)$
- 2) C_1 est la représentation d'une fonction linéaire car c'est une droite qui passe par l'origine du repère.
- 3) La fonction f est une fonction affine (non linéaire), son ordonnée à l'origine est 3 donc la représentation de la fonction f est la droite C_2 (qui passe par le point de coordonnées $(0; 3)$).
- 4) La droite C_1 passe par le point de coordonnées $(3; 5)$ et par l'origine du repère. Cette droite représente une fonction linéaire g définie par $g(x) = \frac{5}{3}x$.
- 5) On cherche x tel que $f(x) = 1$. On résout l'équation :

$$\begin{aligned}
 -0,4x + 3 &= 1 \\
 -0,4x + 3 - 3 &= 1 - 3 \\
 -0,4x &= -2 \\
 x &= -\frac{2}{-0,4} \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

L'antécédent de 1 par la fonction f est 5.

- 6) On calcule $f(4,6)$

$$\begin{aligned}
 f(4,6) &= -0,4 \times 4,6 + 3 \\
 &= -1,84 + 3 \\
 &= 1,16
 \end{aligned}$$

$f(4,6) \neq 1,2$ donc le point de coordonnées $(4,6; 1,2)$ n'appartient pas à C_2 .

Partie 3 : Reasonner - Démontrer

EX 3.1

- Affirmation A : « Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ ».
Si $x = 2$ alors $x^2 = 2^2 = 4$ donc **l'affirmation A est vraie**.
- Affirmation B : « Si $x^2 = 4$ alors $x = 2$ ».
Si $x^2 = 4$ alors x n'est pas nécessairement égal à 2.
 x peut aussi être égal à -2 car $(-2)^2 = -2 \times (-2) = 4$.
Donc **l'affirmation B est fautive**.
- Affirmation C : « Si $x^2 = x$ alors $x = 1$ ».
Si $x^2 = x$ alors x n'est pas nécessairement égal à 1.
 x peut aussi être égal à 0 car $0^2 = 0$.
Donc **l'affirmation B est fautive**.

Autre méthode : on résout l'équation $x^2 = x$
 $x^2 = x$ équivaut à :
 $x^2 - x = 0$
 $x \times x - x \times 1 = 0$
 $x(x - 1) = 0$
 $x = 0$ ou $x - 1 = 0$
 $x = 0$ ou $x = 1$

EX 3.2

La correction de cet exercice ne propose pas la rédaction attendue des théorèmes utilisés mais le raisonnement à tenir pour choisir le bon théorème.

• Figure 1 :

On a un triangle rectangle et la longueur de 2 côtés.

On peut trouver la longueur du côté [BC] avec le théorème de Pythagore, on cherche ici la longueur de l'hypoténuse.
($BC^2 = AC^2 + AB^2$)

• Figure 2 :

On a deux triangles dont les côtés de l'un sont dans le prolongement des côtés de l'autre, et la longueur de deux côtés pour chaque triangle.

On peut se demander si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, on va donc utiliser soit la contraposée soit la réciproque du théorème de Thalès.

Les calculs donnent : $\frac{AB}{AM} = \frac{3,4}{4,2} = \frac{85}{105}$ et $\frac{AC}{AN} = \frac{4}{5} = \frac{84}{105}$

Les quotients n'étant pas égaux, on utilisera la contraposée du théorème de Thalès pour montrer que les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

• Figure 3 :

On a deux triangles dont les côtés de l'un sont dans le prolongement des côtés de l'autre, la longueur de deux côtés pour un triangle, la longueur de deux côtés pour l'autre.

On sait que les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

On peut trouver la longueur du côté [AB] en utilisant le théorème de Thalès.

• Figure 4 :

On a un triangle dont on connaît la longueur des trois côtés.

On peut se demander si ce triangle est rectangle, on va donc utiliser soit la contraposée soit la réciproque du théorème de Pythagore.

Les calculs donnent : $QP^2 = 5,1^2 = 26,01$ et $OQ^2 + OP^2 = 1^2 + 5^2 = 26$

Les résultats n'étant pas égaux, on utilisera la contraposée du théorème de Pythagore pour montrer que le triangle OQP n'est pas rectangle.

• Figure 5 :

On a deux triangles dont les côtés de l'un sont dans le prolongement des côtés de l'autre mais aucune longueur de côtés.

Il faut donc regarder la figure autrement et observer que deux droites sont perpendiculaires à une même troisième.

On peut donc démontrer que les droites (AE) et (LG) sont parallèles à l'aide du théorème suivant :

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles.

• Figure 6 :

On a un triangle dont on connaît la longueur des trois côtés.

On peut se demander si ce triangle est rectangle, on va donc utiliser soit la contraposée soit la réciproque du théorème de Pythagore.

Les calculs donnent : $CE^2 = 34^2 = 1156$ et $DC^2 + DE^2 = 30^2 + 16^2 = 1156$

Les résultats étant égaux, on utilisera la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer que le triangle CED est rectangle.

• Figure 7 :

On a un triangle rectangle et la longueur de 2 côtés.

On peut trouver la longueur du côté [BC] avec le théorème de Pythagore, on cherche ici la longueur d'un des côtés de l'angle droit. ($JL^2 = KL^2 - KJ^2$)

• Figure 8 :

On a deux triangles dont les côtés de l'un sont dans le prolongement des côtés de l'autre, et la longueur de deux côtés pour chaque triangle.

On peut se demander si les droites (AP) et (EF) sont parallèles, on va donc utiliser soit la contraposée soit la réciproque du théorème de Thalès.

Les calculs donnent : $\frac{TP}{TE} = \frac{16}{12+16} = \frac{4}{7}$ et $\frac{TA}{TF} = \frac{24}{24+18} = \frac{4}{7}$

Les quotients étant égaux, on utilisera la réciproque du théorème de Thalès pour montrer que les droites (AP) et (EF) sont parallèles.

EX 3.3

Figure a. Aucune indication sur la figure, nous pouvons simplement dire qu'il s'agit d'un quadrilatère.

Figure b. Le codage précise que ce quadrilatère a ses côtés opposés égaux deux à deux, il s'agit donc d'un parallélogramme.

Figure c. Le codage précise que ce quadrilatère a ses côtés opposés égaux deux à deux, il s'agit donc d'un parallélogramme.

Figure d. Le codage précise que ce quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu donc c'est un parallélogramme.

Figure e. Les indications précisent que ce quadrilatère a deux côtés consécutifs de même longueur, cela ne nous permet pas de dire qu'il s'agit d'un parallélogramme.

Figure f. Les indications précisent que ce quadrilatère a des diagonales de même longueur, cela ne nous permet pas de conclure qu'il s'agit d'un parallélogramme.

EX 3.4

Le graphique ne permet pas de lire l'ordonnée de 18.

La fonction affine représentée par (OA) est $f(x) = 1,5x$

Comme B appartient à (OA) , son ordonnée est l'image de son abscisse 18 par la fonction f .

$$f(18) = 1,5 \times 18 = 27$$

L'ordonnée de B est 27.

EX 3.5

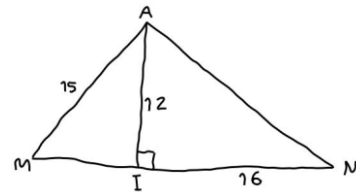
1. Dans le triangle AIM rectangle en I , j'utilise le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} AM^2 &= AI^2 + IM^2 \\ 15^2 &= 12^2 + IM^2 \\ 225 &= 144 + IM^2 \\ IM^2 &= 225 - 144 \\ IM^2 &= 81 \end{aligned}$$

IM étant une longueur, $IM > 0$

$$IM = \sqrt{81} = 9$$

[IM] mesure 9 mm.



2. Dans le triangle AIN rectangle en I , j'utilise le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} AN^2 &= AI^2 + IN^2 \\ AN^2 &= 12^2 + 16^2 \\ AN^2 &= 144 + 256 \\ AN^2 &= 400 \end{aligned}$$

AN étant une longueur, $AN > 0$

$$AN = \sqrt{400} = 20$$

[AN] mesure 20 mm.

3. On a : $MN = MI + IN = 16 + 9 = 25$

Dans le triangle AMN le côté le plus long est $[MN]$.

$$\text{D'une part } MN^2 = 25^2 = 625$$

$$\text{D'autre part } AM^2 + AN^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625.$$

Comme $MN^2 = AM^2 + AN^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle AMN est rectangle en A .**

EX 3.6**Programme A**

Choisir un nombre.
Le multiplier par 10.
Soustraire 15.

Programme B

Choisir un nombre.
Le doubler.
Ajouter (-3).
Multiplier le résultat par 5.

1. Nombre choisi : 2 avec le programme A

$$2$$

$$2 \times 10 = 20$$

$$20 - 15 = 5$$

On obtient bien 5 avec le programme A en ayant choisi 2 au départ.

2. Nombre choisi : 2 avec le programme B

$$2$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$4 + (-3) = 1$$

$$1 \times 5 = 5$$

Avec le programme B, on obtient aussi 5 en ayant choisi 2 comme nombre de départ.

3.

Nombre choisi : - 6 avec le programme A

$$-6$$

$$-6 \times 10 = -60$$

$$-60 - 15 = -75$$

On obtient -75 avec le programme A en ayant choisi - 6 au départ.

Nombre choisi : - 6 avec le programme B

$$-6$$

$$2 \times (-6) = -12$$

$$-12 + (-3) = -15$$

$$-15 \times 5 = -75$$

Avec le programme B, on obtient aussi -75 en ayant choisi -6 comme nombre de départ.

2. Ecrivons les deux programmes de calculs en choisissant x comme nombre de départ.

Nombre choisi : x avec le programme A

$$x$$

$$x \times 10 = 10x$$

$$10x - 15$$

Nombre choisi : x avec le programme B

$$x$$

$$2 \times x = 2x$$

$$2x + (-3) = 2x - 3$$

$$(2x - 3) \times 5 = 10x - 15$$

On voit que les deux expressions développées et réduites des programmes de calculs A et B sont égales, donc l'affirmation est vraie : les programmes A et B donneront toujours le même résultat pour un même nombre choisi au départ.