Spécialité Mathématiques

Pour préparer l'entrée en Terminale

Introduction :

Ce document, élaboré par l'équipe de mathématiques du Lycée Arago, s'adresse aux élèves ayant choisi de poursuivre la spécialité mathématiques en terminale. Le programme de terminale étant plus dense encore que celui de première, un travail de révision pendant les grandes vacances vous aidera à assurer au mieux la transition entre la $1^{\text{ère}}$ et la terminale.

Ce fascicule est constitué de très nombreux exercices corrigés. Il contient également quelques rappels de cours, mais la consultation des cours élaborés avec votre professeur de mathématiques de première, nous semble incontournable.

Il est important de préciser que ce fascicule ne porte pas sur l'ensemble du programme de $1^{\text{ère}}$, nous avons choisi de cibler des éléments du programme de $1^{\text{ère}}$ qui nous paraissent essentiels pour la suite.

Pour valoriser le travail que tout élève ayant choisi de poursuivre la spécialité mathématique en terminale se doit d'effectuer, une évaluation lors de la semaine de la rentrée sera donnée. Elle sera composée uniquement d'exercices de ce fascicule et elle permettra d'élaborer un diagnostic du niveau de chaque élève sur les savoir-faire visés par ce fascicule.

Nous rappelons enfin que le travail que nous avons fourni pour l'élaboration de ce fascicule, n'a qu'un seul objectif : la réussite en mathématiques de tous les élèves ayant choisi cette spécialité.

Sommaire :

CONSULTATION DES CORRIGES :

Les corrigés sont disponibles sur le site du lycée https://francois-arago.mon-ent-occitanie.fr (Menu / L'offre enseignement secondaire / Les enseignements de spécialité du lycée / Se préparer à la spécialité mathématiques)

ou

https://link.infini.fr/aragomaths2021

ou

QR-Code :

Partie 1 : Calcul littéral, équations et inéquations

EX 1.1 Factoriser une expression littérale

Factoriser chacune des expressions suivantes :

$A = -2x^4 + 4x^3 - 6x^2$; $B = (x-5)^2 - 4$; $C = 2xe^x + (x^2-6)e^x$

$D = e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t}$; $E = e^{2x} - 3e^x$; $F = e^{2t} - 1$

EX 1.2 Calcul littéral

Simplifier autant que possible chacune des expressions suivantes :

$A = \frac{8}{x} - \frac{1+8x}{x^2}$

$B = 1 - 2x + \frac{2x^3-1}{x^2+1}$

$C = \frac{-1}{x+3} - \frac{3}{x^2-9}$

$D = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n}$

$E = (e^x)^2 - \frac{1}{2}e^{2x}$

$F = \frac{\frac{1}{7^{n+3}}}{\frac{1}{7^{n+1}}}$

$G = \frac{3^{2(n+1)-1}}{3^{2n-1}}$

EX 1.3 Résoudre une équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1) $2x^2 - x - 3 = 0$
2) $-2x^2 - 2x + 24 = 0$
3) $12x^2 + 5x - 2 = 0$
4) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$
5) $7x^2 + x + 2 = 0$
6) $5x^2 - 3x = 0$
7) $4x^2 - 1 = 0$
8) $3x^2 + 2 = 0$

EX 1.4 Résoudre une équation avec exponentielle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1) $e^x = 0$
2) $(x+1)e^x = 0$
3) $(x^2+x+1)e^x = 0$
4) $e^x - 1 = 0$
5) $e^{-0,2x} - 1 = 0$
6) $e^{2x+1} = 1$
7) $e^{-3x+2} - 1 = 0$
8) $e^{0,5x} = e^{x+3}$

EX 1.5 Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$
2) $-x^2 + x - 2 > 0$
3) $25x^2 - 40x + 16 \leq 0$

EX 1.6 Résoudre une inéquation avec exponentielle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1) $e^x - 1 \geq 0$
2) $-e^{-4t} + 1 > 0$
3) $-e^{-0,5x} - 2 \geq 0$
4) $1 + e^{-3t-5} > 0$

Partie 2 : Suites

Eléments de cours :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même réel r	On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même réel q
Terme général	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_1 + (n-1)r$	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
Somme	$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$ $\text{« nb de termes »} \times \text{« moyenne du 1er et dernier »}$	$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{(1-q^{n+1})}{1-q}$ $\text{"premier terme"} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$
Cas particulier	$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$	$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Pour montrer qu'une suite est :	Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n$ est constante (ne dépend pas de n)	Montrer qu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = q\, u_n$ En pratique, si on a l'expression explicite de u_n , on vérifie que pour tout n , $u_n \neq 0$ et on s'assure que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.
Pour montrer qu'une suite n'est pas :	On calcule u_0, u_1, u_2 (par ex) et on vérifie que $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$	On calcule u_0, u_1, u_2 (par ex) et on vérifie que : $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

EX 2.1 Calcul de termes

Dans chaque cas, calculer $u_1$et u_2 :

1) La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
2) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2u_n+4}$.
3) La suite (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -u_n + n$.
4) La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{4}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
5) La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -\frac{4}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

EX 2.2 Etudier le sens de variation d'une suite

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite proposée.

1) $u_n = -3n - 4$
2) $v_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$
3) $w_n = \frac{2n+1}{3+2n}$
4) $t_n = 2 \times 3^n$
5) $z_n = 3n^2 + 2n - 1$
6) $a_n = 1 - \frac{2}{n}$

EX 2.3 **Suites arithmétiques**

1) Vérifier si les suites ci-après sont arithmétiques. Dans le cas où elles le sont, préciser la raison, le premier terme et l'expression du terme général en fonction de n.

(a) $u_n = -\frac{1}{2}n + 4$

(b) $v_n = 2n^2 - 3n + 1$

(c) $w_n = \frac{5}{1+2n}$

(d) $t_n = 3^n - 1$

2) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On donne : $u_0 = 3$ et $u_{34} = 343$.

(a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

(b) En déduire la valeur de la raison r de cette suite.

(c) Calculer alors u_{100}.

EX 2.4 **Suites géométriques**

1) Vérifier si les suites ci-après sont géométriques. Dans le cas où elles le sont, préciser la raison, le premier terme et l'expression du terme général en fonction de n.

(a) $u_n = 1 - 3n^2$

(b) $v_n = 5n + 2$

(c) $w_n = 4 \times 6^n$

(d) $t_n = \frac{7}{8^{2n+3}}$

2) Soit la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = -2u_n + 3$ et $u_0 = 5$.
On pose aussi pour $v_n = u_n - 1$.

(a) Montrer que (v_n) est géométrique. Déterminer son premier terme et sa raison.

(b) Donner alors l'expression de v_n en fonction de n.

(c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

EX 2.5 **Calcul de somme**

Calculer les sommes suivantes :

1) La somme des 12 premiers termes de la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 5$ et de raison -2.

2) La somme des 23 premiers termes de la suite géométrique de 1er terme $v_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$.

3) $S = 8 + 12 + 16 + \cdots + 224$

4) $S = 3 - 6 + 12 - \cdots + 3072$

5) $S = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$

Partie 3 : Fonctions

Eléments de cours

- Dérivées usuelles :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$f(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{ax+b}$	$f'(x) = a \times e^{ax+b}$	$\mathbb{R}$

- Dérivée d'un produit : $f = u \times v \Rightarrow f' = u' \times v + u \times v'$
- Dérivée d'un quotient : $f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
- Equation d'une tangente :

Si f est dérivable en a alors la tangente au point de C_f d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$

EX 3.1 Calcul de dérivée (sans exponentielle)

Dans chaque cas, déterminer $f'(x)$.

1) $f(x) = -2x^2 + 5x + 1$
2) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 3$
3) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$
4) $f(x) = \frac{6}{x^3}$
5) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$
6) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$
7) $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$

EX 3.2 Calcul de dérivée (avec exponentielle)

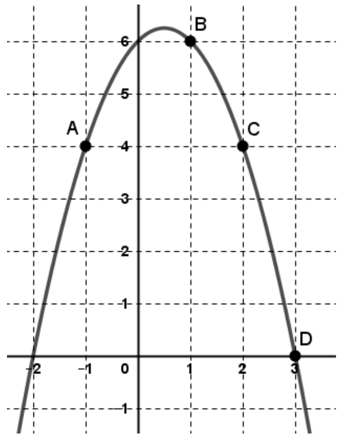
Dans chaque cas, déterminer $f'(x)$.

1) $f(x) = 8e^x - 2x$
2) $f(x) = e^{2x+3}$
3) $f(x) = 4e^{0,25x}$
4) $f(x) = (5x-3)e^x$
5) $f(x) = (x+2)e^{0,5x}$
6) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

EX 3.3 **Nombres dérivés et tangentes à une courbe**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x + 6$.
On a tracé ci-contre sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé.
A, B C et D sont les points de C_f d'abscisses respectives -1 ; 1 ; 2 et 3.

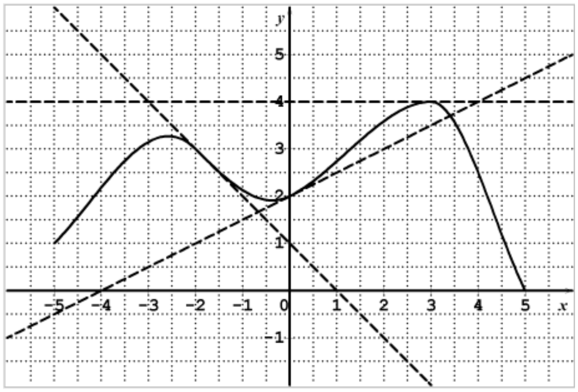
1) Calculer le coefficient de directeur de la tangente à la courbe C_f au point A puis tracer cette tangente sur le graphique ci-contre.
2) Faire de même pour B, C et D.



EX 3.4 **Nombres dérivés et tangentes à une courbe**

On a tracé ans un repère orthonormé la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[-5\,;5]$ ainsi que certaines de ses tangentes (en pointillés sur la figure).
Compléter le tableau suivant :

x	-2	0	3
$f(x)$			
$f'(x)$			



EX 3.5 **Equation de tangente**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Calculer $f'(x)$.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

EX 3.6 **Equation de tangente**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^x$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Calculer $f'(x)$.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

EX 3.7 **Etude des variations**

Dans chaque cas, étudier les variations de la fonction f sur le domaine indiqué.

1) $f(x) = x^2 + x \ \ sur\ \mathbb{R}$
2) $f(x) = x \ - 2x^2 \ \ sur\ \mathbb{R}$
3) $f(x\ ) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x - 1 \ \ sur\ \mathbb{R}$
4) $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 4 \ \ sur\ \mathbb{R}$
5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \ \ sur\ \mathbb{R}$
6) $f(x) = x^3 + x^2 \ \ sur\ \mathbb{R}$
7) $f(x) = -x^4 - 3x^2 \ \ sur\ \mathbb{R}$
8) $f\ (x) \ = \ \ x^4 - 3x^2 \ \ sur\ \mathbb{R}$
9) $f\ (x) = \frac{5x-4}{2-3x} \ \ sur\ \ \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$
10) $f(x) = 4x - \frac{5}{x} \ \ sur\ \mathbb{R}^*$
11) $f(x) = -4x - \frac{5}{x}\ sur\ \mathbb{R}^*$

EX 3.8 **Etude des variations**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right)e^x$.

1) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right)e^x$.
2) En déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

EX 3.9 **Etude des variations**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EX 3.10 **Etude des variations**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -2te^{-0,5t}$.

1) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(t) = (t-2)e^{-0,5t}$.
2) En déduire le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

EX 3.11 **Etude des variations**

1) Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $1 - e^{3x}$.
2) En déduire les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - e^{3x}$.

Partie 4 : Probabilités

Eléments de cours

- La probabilité de B sachant A est $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.
- Deux évènements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

EX 4.1

Un candidat passe une épreuve orale de concours pendant laquelle il tire au hasard une question dans une boîte contenant deux questions d'histoire, une question de littérature et deux questions de sciences.
On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est 0,7 s'il s'agit d'une question d'histoire, 0,6 s'il s'agit d'une question de littérature et 0,5 pour une question de sciences. On considère les évènements suivants :
H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire » ; L : « la question posée au candidat porte sur la littérature » ;
S : « la question posée au candidat porte sur les sciences » ; C : « le candidat répond correctement à la question posée ».

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) Calculer $P(H \cap C)$.
3) Montrer que la probabilité que le candidat réponde correctement à la question posée est 0,6.
4) Les évènements H et C sont-ils indépendants ?
5) Le candidat a répondu correctement à la question posée. Quelle est la probabilité que la question ait porté sur les sciences ?

Eléments de cours

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini noté Ω.
Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans ℝ.
Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est donner, pour chaque valeur x_i que peut prendre X, la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, noté $P(X = x_i) = p_i$ (pour $i = 1, \dots, n$).

x_i	x_1	x_2	…	x_n
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

- **L'espérance** de X est le nombre noté E(X) défini par : . $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$
- **La variance** de X est le nombre noté $V(X)$ défini par :
$$V(X) = \left(x_1 - E(X)\right)^2 p_1 + \left(x_2 - E(X)\right)^2 p_2 + \cdots + \left(x_n - E(X)\right)^2 p_n$$
- On a aussi $V(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n - E(X)^2$
- **L'écart-type** de X est le nombre noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque :

- L'espérance peut être interprétée comme la moyenne des valeurs prises par X sur un nombre de répétitions de cette même expérience
- $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont des indicateurs de la dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$.
Plus la variance et l'écart-type sont grands, plus les valeurs sont dispersées autour de la moyenne.

EX 4.2

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble E des couples $(x\,;\ y)$, avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$, est associé à une loi de probabilité équirépartie.
À chaque couple $(x\,;\ y)$, on associe $|x - y|$. On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E.

1. Définir la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

EX 4.3

On dispose d'une roue qui comporte dix secteurs identiques, neuf verts et un rouge. On propose les deux jeux suivants :

- Jeu 1 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur gagne 2 000 €, sinon il perd 8 000 €.
- Jeu 2 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur ne gagne ni ne perd rien, sinon, il gagne 10 000 €.

1. Intuitivement, quel jeu semble le plus avantageux ?
2. Calculer, pour chaque jeu, l'espérance, la variance puis l'écart-type de gain du joueur. Que constate-t-on ?