Spécialité Mathématiques

Pour préparer l'entrée en Terminale

Corrigé

Partie 1 : Calcul littéral, équations et inéquations

EX 1.1 **Factoriser**

$A = -2x^4 + 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(-x^2 + 2x - 3)$

$B = (x-5)^2 - 4 = (x-5)^2 - 2^2 = [(x-5)-2][(x-5)+2] = (x-7)(x-3)$

$C = 2xe^x + (x^2-6)e^x = (2x + (x^2-6))e^x = (x^2 + 2x - 6)e^x$

$D = e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t} = (1 - 0,5t)e^{-0,5t}$

$E = e^{2x} - 3e^x = e^x \times e^x - 3 \times e^x = (e^x - 3)e^x$

$F = e^{2t} - 1 = (e^t)^2 - 1^2 = (e^t - 1)(e^t + 1)$

EX 1.2 **Calcul littéral**

$$A = \frac{8}{x} - \frac{1+8x}{x^2} = \frac{8x}{x^2} - \frac{1+8x}{x^2} = \frac{8x - 1 - 8x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$B = 1 - 2x + \frac{2x^3-1}{x^2+1} = \frac{(1-2x)(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{2x^3-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x^3-2x+2x^3-1}{x^2+1} = \frac{x^2-2x}{x^2+1} = \frac{x(x-2)}{x^2+1}$$

$$C = \frac{-1}{x+3} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{-1\times(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{-x+3}{x^2-9} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{-x+3-3}{x^2-9} = \frac{-x}{x^2-9}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1\times\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

$$E = (e^x)^2 - \frac{1}{2}e^{2x} = e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F = \frac{\frac{1}{7^{n+3}}}{\frac{1}{7^{n+1}}} = \frac{1}{7^{n+3}} \times \frac{7^{n+1}}{1} = \frac{7^{n+1}}{7^{n+3}} = 7^{n+1-n-3} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$G = \frac{3^{2(n+1)-1}}{3^{2n-1}} = \frac{3^{2n+2-1}}{3^{2n-1}} = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}} = 3^{2n+1-2n+1} = 3^2 = 9$$

EX 1.3 **Résoudre une équation du second degré**

1) $2x^2 - x - 3 = 0$

$a = 2\,;b = -1\,;c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 2\times(-3) = 1 + 24 = 25$ $\quad\Delta > 0$ donc il y a deux racines distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{1-5}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{cases}$$

D'où $S = \{-1\,;1,5\}$

Autre méthode possibe : On remarque que $2\times(-1)^2 - (-1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$ donc $x_1 = -1$ est racine. Ensuite la formule $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donne $-1 \times x_2 = -\frac{3}{2}$ et ainsi $x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$.

2) $-2x^2 - 2x + 24 = 0$

$a = -2\,; b = -2\,; c = 24$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 24 = 4 + 192 = 196$ $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{196}}{2\times(-2)} = \frac{2-14}{-4} = -\frac{12}{-4} = 3 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{196}}{2\times(-2)} = \frac{2+14}{-4} = \frac{16}{-4} = -4 \end{cases}$$

D'où $S = \{-4\,; 3\}$

3) $12x^2 + 5x - 2 = 0$

$a = 12\,;\ b = 5\,;\ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 12 \times (-2) = 121$ $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{121}}{2\times 12} = \frac{-5-11}{24} = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+11}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

D'où $S = \left\{-\frac{2}{3}\,; \frac{1}{4}\right\}$

4) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

$a = -9\ ;\ b = 6\ ;\ c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-9) \times (-1) = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0$ donc il y a une solution unique : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-18} = \frac{1}{3}$. D'où $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

5) $7x^2 + x + 2 = 0$

$a = 7\ ;\ b = 1\ ; c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 7 \times 2 = -55$

$\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution. $S = \emptyset$

6) $5x^2 - 3x = 0$

$x(5x - 3) = 0$

$x = 0 \quad ou \quad 5x - 3 = 0$

$x = 0 \quad ou \quad x = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

$S = \{\,0\ ;\ 0{,}6\,\}$

7) $4x^2 - 1 = 0$

$4x^2 = 1$

$x^2 = \dfrac{1}{4}$

$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}\,; \dfrac{1}{2}\right\}$

8) $3x^2 + 2 = 0$

$3x^2 = -2$

$x^2 = -\dfrac{2}{3}$

Cette équation n'a pas de solution puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.

$S = \emptyset$

EX 1.4 Résoudre une équation avec exponentielle

1) L'équation $e^x = 0$ n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

Donc $S = \emptyset$

2) $(x+1)e^x = 0$

$x + 1 = 0 \;\; ou \; e^x = 0$

$x = -1 \;\; ou \; e^x = 0$

Donc $S = \{-1\}$

3) $(x^2 + x + 1)e^x = 0$

$x^2 + x + 1 = 0 \quad ou \quad e^x = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

$\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution

Donc $S = \emptyset$

4) $e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$e^x = e^0$

$x = 0$

$S = \{0\}$

5) $e^{-0,2x} - 1 = 0$

$e^{-0,2x} = 1$

$e^{-0,2x} = e^0$

$-0,2x = 0$

$x = 0$

$S = \{0\}$

6) $e^{2x+1} = 1$

$e^{2x+1} = e^0$

$2x + 1 = 0$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

$S = \{-\frac{1}{2}\}$

7) $e^{-3x+2} - 1 = 0$

$e^{-3x+2} = 1$

$e^{-3x+2} = e^0$

$-3x + 2 = 0$

$-3x = -2$

$x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$S = \{\frac{2}{3}\}$

8) $e^{0,5x} = e^{x+3}$

$0,5x = x + 3$

$0,5x - x = 3$

$-0,5x = 3$

$x = \frac{3}{-0,5} = -6$

$S = \{-6\}$

EX 1.5 Résoudre une inéquation du second degré

1) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

$\Delta = \cdots = 49$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines $x_1 = \cdots = -3$ et $x_2 = 0,5$

x	$-\infty$		-3		$0,5$		$+\infty$
signe de $2x^2 + 5x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -3] \cup [0,5 ; +\infty[$

2) $-x^2 + x - 2 > 0$

$\Delta = \cdots = -7$

$\Delta < 0$ donc il n'y a pas de racine.

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $-x^2 + x - 2$		$-$	

$S = \emptyset$

3) $25x^2 - 40x + 16 \leq 0$

$\Delta = \cdots = 0$ donc il y a une racine unique $x_0 = \cdots = \frac{4}{5}$

x	$-\infty$	$4/5$	$+\infty$
signe de $25x^2 - 40x + 16$	$+$	0	$+$

$S = \{\frac{4}{5}\}$

EX 1.6 Résoudre une inéquation avec exponentielle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1) $e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq 1$

$e^x \geq e^0$

$x \geq 0$

$S = [0\,;+\infty[$

2) $-e^{-4t} + 1 > 0$

$-e^{-4t} > -1$

$e^{-4t} < 1$

$e^{-4t} < e^0$

$-4t < 0$

$t > 0$

On divise les deux membres par -4 qui est négatif donc on change le sens de l'inégalité.

$S =]0\,;+\infty[$

3) $-e^{-0,5x} - 2 \geq 0$

$-e^{-0,5x} \geq 2$

$e^{-0,5x} \leq -2$

$S = \emptyset$ car $e^{-0,5x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) $1 + e^{-3t-5} > 0$

$e^{-3t-5} > -1$

$S = \mathbb{R}$ car $e^{-3t-5} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2 : Suites

EX 2.1 Calcul de termes

1) La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

Pour calculer u_1, on doit remplacer n par 0 : $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 - 2 = 3 \times \frac{2}{3} - 2 = 2 - 2 = 0$

Pour calculer u_2, on remplace n par 1 : $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 - 2 = 3 \times 0 - 2 = -2$

2) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2u_n+4}$.

Même remarque sur les indices :

$$u_1 = \frac{1+u_0}{2u_0+4} = \frac{1+1}{2 \times 1 + 4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1+u_0}{2u_0+4} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2 \times \frac{1}{3} + 4} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}+4} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{14}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

3) La suite (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -u_n + n$.

Pour $n = 0$: $u_1 = -u_0 + 0 = -(-1) + 0 = 1$

Pour $n = 1$: $u_2 = -u_1 + 1 = -1 + 1 = 0$

4) La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{4}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

On sait que $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier n, la suite étant arithmétique.

On a alors $u_1 = u_0 - \frac{4}{3} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Et $u_2 = u_1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

5) La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -\frac{4}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
On sait que $u_{n+1} = u_n \times q$ pour tout entier n, la suite étant géométrique.
Donc $u_1 = u_0 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{3}$.
De même : $u_2 = u_1 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}$

EX 2.2 Etudier le sens de variation d'une suite

1) Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = (-3(n+1) - 4) - (-3n - 4) = -3n - 7 + 3n + 4 = -3$
On a donc $u_{n+1} - u_n < 0$. D'où la suite est strictement décroissante.
Remarque : en fait, comme $u_{n+1} - u_n$ est constant, on peut en déduire également que la suite est arithmétique, de raison -3.

2) La suite est à termes strictement positifs. On peut donc s'intéresser au critère sur la comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

On a pour tout entier naturel n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5} < 1$.

Donc (v_n) est une suite strictement décroissante.

3) On a $w_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en posant $f(x) = \frac{2x+1}{3+2x}$.
Alors (w_n) a les mêmes variations que f sur $[0; +\infty[$.
On peut alors dériver f pour connaître son sens de variation :

$$f'(x) = \frac{2(3+2x) - 2(2x+1)}{(3+2x)^2} = \frac{4}{(3+2x)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
(w_n) est donc strictement croissante.

4) La suite est à termes strictement positifs. On peut donc s'intéresser au critère sur la comparaison de $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ à 1.

On a pour tout entier naturel n, $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2\times 3^{n+1}}{2\times 3^n} = 3 > 1$.

Donc (t_n) est une suite strictement croissante.
5) On a $z_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en posant $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
Alors (z_n) a les mêmes variations que f sur $[0; +\infty[$.
On peut alors dériver f pour connaître son sens de variation :
$f'(x) = 6x + 2$ qui est positive sur $[0; +\infty[$.
Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
(z_n) est donc strictement croissante.

6) On a $a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n+1} - 1 + \frac{2}{n} = -\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} = \frac{(-2n+2(n+1))}{n(n+1)} = \frac{-2n+2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$
Donc $a_{n+1} - a_n > 0$.
D'où (a_n) est strictement croissante.

EX 2.3 Suites arithmétiques

1)(a) On a $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}(n+1) + 4\right) - \left(-\frac{1}{2}n + 4\right) = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2}n - 4 = -\frac{1}{2}$: cette différence étant constante (indépendante de n), la suite est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.
Son premier terme est $u_0 = -\frac{1}{2} \times 0 + 4 = 4$ et le terme général est donné par l'énoncé.

(b) On calcule les premiers termes (la suite n'étant pas de la forme $an+b$, on peut conjecturer qu'elle n'est pas arithmétique) :
$v_0 = 1,$
$v_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0,$
$v_2 = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3.$
Donc $v_1 - v_0 = -1$ et $v_2 - v_1 = 3$
On voit donc que $v_{n+1} - v_n$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique.

(c) On calcule les premiers termes (la suite n'étant pas de la forme $an+b$, on peut conjecturer qu'elle n'est pas arithmétique) :
$w_0 = \frac{5}{1} = 5,$
$w_1 = \frac{5}{1+2\times 1} = \frac{5}{3},$
$w_2 = \frac{5}{1+2\times 2} = \frac{5}{5} = 1$
Donc $w_1 - w_0 = \frac{5}{3} - 5 = -\frac{10}{3}$ et $w_2 - w_1 = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$
On voit donc que $w_{n+1} - w_n$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique.

(d) On calcule les premiers termes (la suite n'étant pas de la forme $an+b$, on peut conjecturer qu'elle n'est pas arithmétique) :
$t_0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0,$
$t_1 = 3^1 - 1 = 2,$
$t_2 = 3^2 - 1 = 8$
Donc $t_1 - t_0 = 2$ et $t_2 - t_1 = 6$
On voit donc que $t_{n+1} - t_n$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique.

2) $(\boldsymbol{a})\ u_n = u_0 + nr = 3 + nr$

$(\boldsymbol{b})$ Or $u_{34} = 343$ donc $343 = 3 + 34r\ \ d'où\ \ 34r = 340$

$et\ donc\ r = \frac{340}{34} = 10$

$u_n = u_0 + nr = 3 + nr = 3 + 10\,n$

$et\ donc\ u_{100} = 3 + 10 \times 100 = 1003$

EX 2.4 Suites géométriques
1)
(a) On calcule les premiers termes :
$u_0 = 1 - 3 \times 0^2 = 1,$
$u_1 = 1 - 3 \times 1^2 = -2$
$u_2 = 1 - 3 \times 2^2 = 1 - 12 = -11$
Donc $\frac{u_2}{u_1} = \frac{11}{2}$ et $\frac{u_1}{u_0} = -2$
On voit donc que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas géométrique.
(b) On calcule les premiers termes :
$v_0 = 5 \times 0 + 2 = 2,$
$v_1 = 5 \times 1 + 2 = 7$
$v_2 = 5 \times 2 + 2 = 12$
Donc $\frac{v_2}{v_1} = \frac{12}{7}$ et $\frac{v_1}{v_0} = \frac{7}{2}$
On voit donc que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas géométrique.

(c) On a pour tout entier n, $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{4\times 6^{n+1}}{4\times 6^n} = 6^{(n+1)-1} = 6$: ce quotient étant constant (indépendant de n), la suite est géométrique de raison 6.

Son premier terme est $w_0 = 4 \times 6^0 = 4$ et le terme général est donné par l'énoncé.

(d) On a pour tout entier n, $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{7}{8^{2(n+1)+3}}}{\frac{7}{8^{2n+3}}} = \frac{\frac{7}{8^{2n+2+3}}}{\frac{7}{8^{2n+3}}} = \frac{\frac{7}{8^{2n+5}}}{\frac{7}{8^{2n+3}}} = \frac{7}{8^{2n+5}} \times \frac{8^{2n+3}}{7} = \frac{8^{2n+3}}{8^{2n+5}} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$: ce quotient étant constant (indépendant de n), la suite est géométrique de raison $\frac{1}{64}$.

Son premier terme est $t_0 = \frac{7}{8^{2\times 0+3}} = \frac{7}{8^3}$ et le terme général est donné par l'énoncé.

2) (a) Soit n un entier naturel. Montrons qu'il existe un réel k tel que $v_{n+1} = k \times v_n$

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2v_n$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 4$

(b) D'où $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times (-2)^n$.

(c) Or $v_n = u_n - 1$. D'où $u_n = v_n + 1 = 4 \times (-2)^n + 1$

EX 2.5 Calcul de somme

1) On veut calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{11} = \frac{u_0 + u_{11}}{2} \times 12$

Or $u_{11} = u_0 + 11 \times r = 5 + 11 \times (-2) = 5 - 22 = -17$

Donc $S = \frac{5-17}{2} \times 12 = -\frac{12}{2} \times 12 = -6 \times 12 = -72$

2) $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{22} = v_0 \times \frac{1-q^{23}}{1-q} = 2 \times \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{23}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \times \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{23}\right)}{\frac{1}{2}} = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{23}\right)$

3) On reconnait la somme des termes consécutifs de la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme u_0 =8. On a besoin de savoir de combien de termes il s'agit. Le terme général de la suite est $u_n = 8 + 4n$. Le dernier terme de cette somme est 224. On a donc $224 = 8 + 4n$. Donc $4n = 216$ et $n = 54$.

Alors $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{11} = \frac{u_0 + u_{54}}{2} \times 55 = \frac{8+224}{2} \times 55 = 6380$

4) On reconnait la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison -2 et de premier terme u_0 =3.

On a besoin de savoir de combien de termes il s'agit. Le terme général de la suite est $u_n = 3 \times (-2)^n$. Le dernier terme de cette somme est 3072. On a donc $3072 = 3 \times (-2)^n$. Donc (à l'aide de la calculatrice et par tâtonnements ou en affichant le tableau des termes de la suite) : $n = 10$.

Alors $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = 3 \times \frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = 3 \times \frac{2049}{3} = 2049$

5) On reconnait la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison x^2 et de premier terme 1. On a besoin de savoir de combien de termes il s'agit. Le terme général de la suite est $u_k = 1 \times (x^2)^k = x^{2k}$. Le dernier terme de cette somme est x^{2n}. On a donc $x^{2n} = x^{2k}$. Donc $n = k$: le dernier terme est d'indice k et il y a $n + 1$ termes dans cette somme (de u_0 à u_n : $n + 1$ termes).

Alors $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-(x^2)} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$

Partie 3 : Fonctions

EX 3.1 Calcul de dérivée (sans exponentielle)

1) $f(x) = -2x^2 + 5x + 1 \Rightarrow f'(x) = -4x + 5$
2) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 8x - 1$
3) $f(x) = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
4) $f(x) = \frac{6}{x^3} = 6 \times \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = 6 \times \frac{-3}{x^4} = -\frac{18}{x^4}$
5) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

   f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u = x-1 & u' = 1 \\ v = 2x+3 & v' = 2 \end{cases}$

   $f'(x) = \frac{1\times(2x+3)-(x-1)\times 2}{(2x+3)^2} = \frac{2x+3-2x+2}{(2x+3)^2} = \frac{5}{(2x+3)^2}$

6) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$

   f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u = 2x-5 & u' = 2 \\ v = x^2+1 & v' = 2x \end{cases}$

   $f'(x) = \frac{2\times(x^2+1)-(2x-5)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+10x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+10x+2}{(x^2+1)^2}$

7) $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$

   f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = 3x+1 & u' = 3 \\ v = \sqrt{x} & v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

   $f'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (3x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

   On peut simplifier le résultat précédent en réduisant au même dénominateur :

$$3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x}{2\sqrt{x}} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$$

   D'où :

$$f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$$

EX 3.2 Calcul de dérivée (avec exponentielle)

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = 8e^x - 2x \Rightarrow f'(x) = 8e^x - 2$
2) $f(x) = e^{2x+3} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x+3}$
3) $f(x) = 4e^{0,25x} \Rightarrow f'(x) = 4 \times 0,25 \times e^{0,25x} = 1 \times e^{0,25x} = e^{0,25x}$
4) $f(x) = (5x-3)e^x$

   f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = 5x-3 & u' = 5 \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$

   $f'(x) = 5e^x + (5x-3)e^x$

   Pour simplifier le résultat, on factorise ensuite par e^x :

   $f'(x) = (5+5x-3)e^x = (5x+2)e^x$.

5) $f(x) = (x+2)e^{0,5x}$

   f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = x+2 & u' = 1 \\ v = e^{0,5x} & v' = 0,5e^{0,5x} \end{cases}$

   $f'(x) = 1 \times e^{0,5x} + (x+2) \times 0,5e^{0,5x}$

   Pour simplifier le résultat, on factorise ensuite par $e^{0,5x}$:

   $f'(x) = (1 + (x+2) \times 0,5)e^x = (1 + 0,5x + 1)e^{0,5x} = (0,5x+2)e^{0,5x}$.

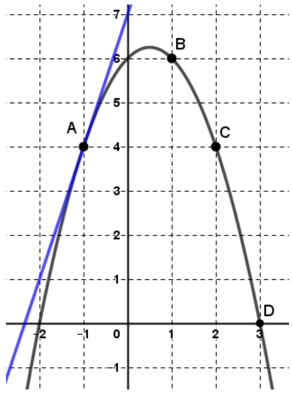
6) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u = e^x - 1 & u' = e^x \\ v = e^x + 1 & v' = e^x \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

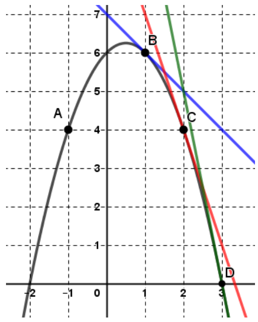
EX 3.3 Nombres dérivés et tangentes à une courbe

$f(x) = -x^2 + x + 6 \Rightarrow f'(x) = -2x + 1$



1) A est la point de C_f d'abscisse -1 donc le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A est égal à $f'(-1) = -2 \times (-1) + 1 = 3$.

2) Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point B est $f'(1) = -2 \times 1 + 1 = -1$.
Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point C est $f'(2) = -2 \times 2 + 1 = -3$.
Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point D est $f'(3) = -2 \times 3 + 1 = -5$.



EX 3.4 Nombres dérivés et tangentes à une courbe

	x	-2	0	3
Abscisse du point →	x	-2	0	3
Ordonnée du point →	$f(x)$	3	2	4
Coefficient directeur de la tangente en ce point →	$f'(x)$	-1	$0,5$	0

EX 3.5 Equation de tangente

1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 1 = 6x^2 - 10x + 1$
2) L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 est donnée par la formule

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$$

Or $f'(1) = 6 \times 1^2 - 10 \times 1 + 1 = -3$ et $f(1) = 2 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 1 = -2$.
D'où :

$$y = -3(x-1) - 2$$
$$y = -3x + 3 - 2$$
$$y = -3x + 1$$

EX 3.6 Equation de tangente

$f(x) = (2x+1)e^x$

1) f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = 2x + 1 & u' = 2 \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$

$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2 + 2x + 1)e^x = (2x+3)e^x$.

2) L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

Or $f'(0) = (2 \times 0 + 3)e^0 = 3$ et $f(0) = (2 \times 0 + 1)e^0 = 1$

Donc :

$$y = 3x + 1$$

EX 3.7 Etude des variations

1) $f(x) = x^2 + x \ sur \ \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x + 1$

$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-1/4$	↗	

$ax + b$ est du signe de a à droite de la racine.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

2) $f(x) = x - 2x^2 \ sur \ \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - 2 \times 2x = 1 - 4x$

$1 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$1/8$	↘	

$ax + b$ est du signe de a à droite de la racine.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x - 1 \ sur \ \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 6 = x^2 + x - 6$

Les racines de $x^2 + x - 6$ sont -3 et 2 car $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ donc $\begin{cases} x_1 = \cdots \\ x_2 = \cdots \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$12{,}5$	↘	$-\frac{25}{3}$	↗	

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines.

$f(-3) = \cdots = 12{,}5$

$f(2) = \cdots = -\frac{25}{3}$

4) $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 4 \quad sur\ \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$

L'équation $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ n'a pas de solution car $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = -8 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines éventuelles.

5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \quad sur\ \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

L'équation $3x^2 - 6x + 3 = 0$ a pour unique solution $x_0 = 1$ car $\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0 \\ donc \quad x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{6} = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			$\nearrow$		

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines éventuelles.

6) $f(x) = x^3 + x^2 \quad sur\ \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

Pour résoudre $3x^2 + 2x = 0$ on peut calculer Δ mais il y a plus simple ici :

$$3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = -\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines éventuelles.

7) $f(x) = -x^4 - 3x^2 \;\; sur \; \mathbb{R}$

$f'(x) = \; -4x^3 - 6x$

Remarque : Nous ne savons pas, en général, étudier le signe d'une fonction polynôme du 3ème degré. C'est pourquoi, grâce à une factorisation, nous allons nous ramener à l'étude du signe du produit d'une fonction affine par une fonction polynôme du second degré.

$f'(x) = \; -4x^3 - 6x = x(-4x^2 - 6)$

$Le\ facteur - 4x^2 - 6\ est\ clairement\ négatif\ ,en\ effet: x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow -4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 6 \leq -6 < 0$

(*Nous aurions aussi pu calculer le discriminant* Δ, qui est négatif donc le trinôme est du signe de a ; c'est à dire strictement négatif)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$-4x^2-6$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	

$f(0) = -0^4 - 3 \times 0^2 = 0$

8) $f\,(x) \;=\;\; x^4 - 3x^2 \;\; sur \; \mathbb{R}$

$f'(x) = \; 4x^3 - 6x = x(4x^2 - 6)$

Recherche du signe du trinôme $4x^2 - 6$: (on aurait pu calculer Δ mais il y a plus simple ici)

Résolvons $4x^2 - 6 = 0 \;\;\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{6}{4} = 1{,}5 \;\;\Leftrightarrow x = \; -\sqrt{1{,}5}\; ou\; x = \; \sqrt{1{,}5}$

Notons $\;\; x_1 = -\sqrt{1{,}5}\; et\; x_2 = \sqrt{1{,}5}$.

x	$-\infty$		$x1$		0		$x2$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x^2-6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(x2)$	$\nearrow$	

9) $f(x) = \frac{5x-4}{2-3x}$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$f(x) = \frac{u}{v} donc\ f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $avec$ $u = 5x - 4$; $u' = 5$; $v = 2 - 3x$; $v' = -3$

D'où $f'(x) = \frac{5\times(2-3x)-(-3)\times(5x-4)}{(2-3x)^2} = \frac{5\times(2-3x)+3\times(5x-4)}{(2-3x)^2} = \frac{10-15x+15x-12}{(2-3x)^2} = \frac{-2}{(2-3x)^2}$

$(2-3x)^2 > 0\ sur\ \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}\ donc\ f'(x) est\ du\ signe\ de -2.$ Ainsi $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; \frac{2}{3}[$ et sur $]\frac{2}{3}; +\infty[$.

x	$-\infty$	$2/3$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	↘	‖	↘

10) $f(x) = 4x - \frac{5}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

$f(x) = 4x - \frac{5}{x}$ définie et dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

$f'(x) = 4 - 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4 + \frac{5}{x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ $\quad car\ x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

donc f *est strictement croissante sur* $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	↗	‖	↗

11) $f(x) = -4x - \frac{5}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

$f(x) = -4x - \frac{5}{x}$ définie et dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

$f'(x) = -4 - 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -4 + \frac{5}{x^2} = \frac{-4x^2+5}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 5$.

Pour résoudre $-4x^2 + 5 = 0$ on peut calculer Δ mais il y a plus simple ici :

$$-4x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad ou \quad = -\sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$

Notons $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

x	$-\infty$	$x1$		0		$x2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(x1)$	↗	‖	↗	$f(x2)$	↘

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines éventuelles. Ici $a = -4 < 0$.

EX 3.8 Etude des variations

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right)e^x$.

1) f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = \frac{1}{2}x^2 - 4 & u' = \frac{1}{2} \times 2x = x \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$

$f'(x) = xe^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right)e^x = \left(x + \frac{1}{2}x^2 - 4\right)e^x$

$D'où$ $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right)e^x$

2) Les racines de $\frac{1}{2}x^2 + x - 4$ sont -4 et 2 en effet : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-4) = 9 > 0$

Donc $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times\frac{1}{2}} = \frac{-1-3}{1} = -4$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{1} = 2$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
signe de $\frac{1}{2}x^2 + x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
signe de e^x		$+$		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$	$4e^{-4}$	$\searrow$	$-2e^2$	$\nearrow$	

$f(-4) = \left(\frac{1}{2}(-4)^2 - 4\right)e^{-4} = \left(\frac{1}{2} \times 16 - 4\right)e^{-4} = (8-4)e^{-4} = 4e^{-4} \approx 0{,}07$

$f(2) = \left(\frac{1}{2} \times 2^2 - 4\right)e^2 = (2-4)e^2 = -2e^2 \approx -14{,}78$

EX 3.9 Etude des variations

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$f$est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u = e^x - 1 & u' = e^x \\ v = e^x + 1 & v' = e^x \end{cases}$

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EX 3.10 Etude des variations

$f(t) = -2te^{-0,5t}$.

1) f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = -2t & u' = -2 \\ v = e^{-0,5t} & v' = -0,5e^{-0,5t} \end{cases}$

   $f't) = -2e^{-0,5t} + (-2t) \times (-0,5e^{-0,5t}) = -2e^{-0,5t} + te^{-0,5t} = (t-2)e^{-0,5t}$.

2) $t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

t	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $t-2$		$-$	0	$+$	
signe de $e^{-0,5t}$		$+$		$+$	
signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
variations de f		↘	$-4e^{-1}$	↗	

   $f(2) = -2 \times 2 \times e^{-0,5\times 2} = -4e^{-1} \approx -1,47$

EX 3.11 Etude des variations

1) $1 - e^{3x} = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} = e^0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   $1 - e^{3x} > 0 \Leftrightarrow e^{3x} < 1 \Leftrightarrow e^{3x} < e^0 \Leftrightarrow 3x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

   D'où le tableau de signe de $1 - e^{3x}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $1 - e^{3x}$		$+$	0	$-$	

2) $f(x) = 3x - e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3 - 3e^{3x} = 3(1 - e^{3x})$

   On remarque que $f'(x)$ est du signe $1 - e^{3x}$.
   En utilisant la question 1) on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f		↗	-1	↘	

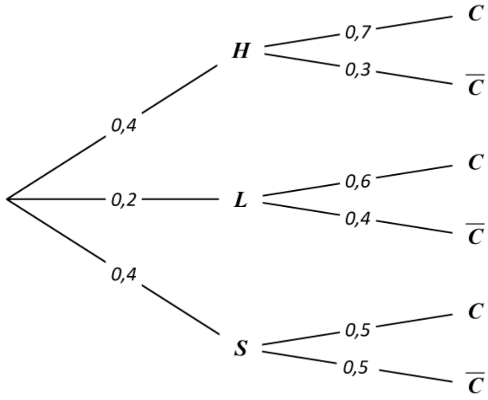
$f(0) = 3 \times 0 - e^{3\times 0} = -e^0 = -1$

Partie 4 : Probabilités

EX 4.1

Il y a deux questions sur l'Histoire, une sur la Littérature et deux sur les Sciences, on a ainsi :
$p(H) = p(S) = \frac{2}{5} = 0{,}4 \; et \; p(L) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

1. L'arbre de probabilité associé est :



2. $p(H \cap C) = p(H) \times p_H(C) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

3. $p(C) = p(H \cap C) + p(L \cap C) + p(S \cap C) = 0{,}28 + 0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}6$

4. D'une part $p(H \cap C) = 0{,}28$ et d'autre part $p(H) \times p(C) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.
$p(H) \times p(C) \neq p(H \cap C)$ donc H et C ne sont pas indépendants.

5. La probabilité cherchée est une probabilité conditionnelle : $p_C(S) = \frac{p(S\cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}4\times 0{,}5}{0{,}60} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \mathbf{\frac{1}{3}} \approx 0{,}333$.

EX 4.2

1. Pour trouver les valeurs prises par X , on dresse le tableau suivant :

x \ y	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Les événements (x, y) sont équiprobables donc $P(x, y) = \frac{1}{36}$
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
Évènements	Obtenir (1;1), (2;2) ; (3;3) ; (4;4), (5;5), (6;6)	Obtenir (1;2), (2;1), (2;3), (3;2), (3;4), (4;3), (4;5) , (5;4), (5;6), (6;5)	Obtenir (1;3), (3;1), (2;4), (4;2), (3;5), (5;3), (4;6) , (6;4)	Obtenir (1;4), (4;1), (2;5), (5;2), (3;6), (6;3)	Obtenir (1;5), (5;1), (2;6), (6;2)	Obtenir (1;6), (6;1),
$P(X = x_i)$	$6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$	$10 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$	$8 \times \frac{1}{36} = \frac{2}{9}$	$6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$	$4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$	$2 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

2. Calculer l'espérance et la variance de X.
$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{18} = \frac{35}{18} \approx 1{,}94$
$V(X) = \left(0 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{5}{18} + \left(2 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{2}{9} + \left(3 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(4 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{1}{9} + \left(5 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{1}{18}$
$V(X) = \frac{665}{324} \approx 2{,}05$

EX 4.3

On dispose d'une roue qui comporte dix secteurs identiques, neuf verts et un rouge. On propose les deux jeux suivants :

- Jeu 1 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur gagne 2 000 €, sinon il perd 8 000 €.
- Jeu 2 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur ne gagne ni ne perd rien, sinon, il gagne 10 000 €.

1. Intuitivement, il semble que le jeu 1 est le plus avantageux car il y a plus de secteurs verts et donc on gagnera 2 000€ facilement.

2. **Jeu 1 :**

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain (algébrique) obtenu au jeu 1.
La loi de probabilité de X est donné par le tableau suivant

x_i	$2\,000$	$-8\,000$
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{10} = 0{,}9$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$

$E(X) = 2\,000 \times 0{,}9 + (-8\,000) \times 0{,}1 = 1000.$
$V(X) = (2\,000 - 1\,000)^2 \times 0{,}9 + (-8\,000 - 1\,000)^2 \times 0{,}1 = 9\,000\,000$ et $\sigma(X) = \sqrt{9\,000\,000} = 3\,000$

Soit Y la variable aléatoire correspondant au gain (algébrique) obtenu au jeu 2.
La loi de probabilité de X est donné par le tableau suivant

x_i	0	$10\,000$
$P(Y = x_i)$	$\frac{9}{10} = 0{,}9$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$

$E(X) = 0 \times 0{,}9 + (10\,000) \times 0{,}1 = 1000.$
$V(X) = (0 - 1\,000)^2 \times 0{,}9 + (10\,000 - 1\,000)^2 \times 0{,}1 = 9\,000\,000$ et $\sigma(X) = \sqrt{9\,000\,000} = 3\,000$

Conclusion : Pour chaque jeu, le joueur a une espérance de gain identique de 1 000 € et un écart-type des gains possibles identique (3000 €). On peut donc considérer que ces deux jeux sont équivalents.