

**Spécialité Mathématiques
Pour préparer l'entrée en Première**



Présentation :

Ce fascicule, élaboré par l'équipe de mathématiques du Lycée Arago, a pour objectif de permettre aux élèves entrant en classe de première de mieux appréhender la spécialité mathématique.

Nous avons remarqué, depuis un certain nombre d'années, les difficultés croissantes des élèves concernant les techniques calculatoires de base. Maîtriser ces techniques n'est certes pas suffisant pour réussir en mathématiques en classe de première, mais leur non-maîtrise est un obstacle qui se révèle difficilement surmontable pour un certain nombre d'élèves.

Nous avons aussi ajouté un travail de révision sur la notion de vecteur, qui est une nouvelle notion de la classe de seconde, et dont la maîtrise pour la classe de première, est primordiale.

Ce fascicule ne contient qu'une partie du programme de seconde. Rien ne vous interdit d'ailleurs, de retravailler durant les vacances les chapitres sur la géométrie et les probabilités.

Une autre difficulté que nous avons relevée, est l'absence de tout travail de révision pendant les deux mois de vacances. Or le programme de première est dense et l'horaire hebdomadaire de 4h nous oblige à adopter un rythme supérieur à celui de seconde. Toutes les notions présentes dans ce fascicule nous sont grandement utiles en 1^{ère}, et nous n'avons malheureusement pas le temps de nous y attarder en classe.

Notre objectif est donc double : consolider les bases calculatoires des élèves, mais aussi créer une vraie dynamique pour la rentrée de septembre.

Ce fascicule est constitué de très nombreux exercices dont vous trouverez, sur le site du lycée, la correction détaillée. Il y aura éventuellement quelques rappels de cours, mais la consultation des cours élaborés avec votre professeur de mathématiques de seconde, nous semble incontournable.

De plus, pour valoriser le travail que tout élève ayant choisi la spécialité mathématique se doit d'effectuer, une évaluation lors de la semaine de la rentrée sera donnée. Elle reposera uniquement sur des exercices de ce fascicule et elle permettra d'élaborer un diagnostic du niveau de chaque élève.

Nous rappelons enfin que le travail que nous avons fourni pour l'élaboration de ce fascicule n'a qu'un seul objectif : la réussite en mathématiques des élèves ayant choisi cette spécialité.

CONSULTATION DES CORRIGES :

Les corrigés sont disponibles sur le site du lycée <https://francois-arago.mon-ent-occitanie.fr>

Capacité 1 : Calculer sans calculatrice.

Exercice 1 : Ecrire le plus simplement possible

$$A = \frac{13}{8} - \frac{5}{24} \quad ; \quad B = \frac{24}{35} \times \frac{14}{36} \quad ; \quad C = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{21}{16}} \quad ; \quad D = \frac{5}{4} - \frac{7}{4} \times \frac{7}{8} \quad ; \quad E = \frac{-2}{3} \times \frac{-5}{2} \times \frac{3}{-7} \quad ; \quad F = \frac{-4}{45} \times \frac{25}{8}$$

$$G = 11 \div \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right) \quad ; \quad H = 1 \div \left(\frac{-7}{4}\right) \quad ; \quad I = \frac{-4}{45} \div \frac{16}{15} \quad ; \quad J = \frac{2}{\frac{3}{5}} \quad ; \quad K = \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5}\right) \times \frac{25}{7}$$

$$L = \left(3 - \frac{2}{3}\right)^2 \quad ; \quad M = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad ; \quad N = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{3} - 1 \quad ; \quad P = -7\left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \frac{1}{9}$$

$$Q = \frac{\frac{-2}{3} + 1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + 1} \quad ; \quad R = \left(\frac{2}{3} - 3\right)^2 \quad ; \quad S = (-1)^{10} \quad ; \quad T = (-1)^{15}$$

Exercice 2 :

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$.
Déterminer les images respectives de : 1 ; -1 ; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{4}$.
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.
Déterminer les images respectives de : 1 ; -1 ; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{4}$.
3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - x^2 + x + 6$.
Déterminer les images respectives de : 1 ; -1 ; 2 ; -2 .
4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$.
Déterminer les images respectives de : 1 ; -1 ; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{4}$.

Exercice 3 :

Règles calculatoires sur les puissances.

a et b sont des réels ; n et p sont des entiers naturels.

$$\text{background-color: yellow; } a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad (a^p)^n = a^{np}$$

$$\text{background-color: yellow; } (a b)^n = a^n \times b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{5^{10}}{5^{11}} \quad B = \frac{7^{101}}{7^{100}} \quad C = \frac{2^{n+1}}{2^n} \quad D = \frac{3^n}{3^{n+2}} \quad E = \frac{2 \times 3^7}{8 \times 3^5} \quad F = 2^{-1} \quad G = 3^{-2}$$

$$H = (2^{-1})^{-3} \quad I = 3^n \times 3^2 \quad J = 3^n \times 3 \quad K = 3^n \times 3^{2n+1} \quad L = 5^n \times 5^{2-n} \quad M = 7 + 7^{-1}$$

$$N = 2^{-1} + 3^{-2} \quad P = \frac{5^3}{5} \quad Q = \frac{5^2 \times 7^3}{5^3 \times 7^2} \quad R = \frac{3 \times 5 \times 7}{7^2 \times 3^2} \quad S = (3y)^2 \quad T = (2y)^3$$

$$U = \left(\frac{x}{8}\right)^2 \quad V = \frac{15^2}{5^2} \quad W = \frac{15^2}{5} \quad X = \frac{15^2}{5^3} \quad Y = \frac{(3 \times 7)^4}{3^4 \times 11^1 \times 7^2} \quad Z = \frac{8^3 \times 15^2}{9 \times 5 \times 16^2}$$

Exercice 4 :

Règles calculatoires sur les racines carrées.

Formules : pour tout a positif, $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$

Pour tous a et b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$ Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Simplifier, si possible, les écritures suivantes :

- $(\sqrt{36})^2$; $\sqrt{4^2}$; $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$; $\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$; $\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}$; $4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$; $4\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$; $(3\sqrt{5})^2$
 $(10\sqrt{2})^2$; $\sqrt{\frac{9}{4}}$; $\sqrt{\frac{25}{16}}$; $\sqrt{\frac{5}{4}}$; $\sqrt{3} + \sqrt{3}$; $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; $\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$; $5\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{2}$
- Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est le plus petit entier positif possible.
 $\sqrt{8}$; $\sqrt{500}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{48}$; $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{70}$; $\sqrt{32} + 5\sqrt{8} - \sqrt{18}$
- Développer et réduire :

$$A = 2\sqrt{7}(4 - \sqrt{7}) ; B = (2 - \sqrt{5})^2 ; C = (3 + 2\sqrt{5})^2 ; D = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

Capacité 2 : Développer une expression littérale.

Identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exercice 1 : Sans les identités remarquables.

Développer et réduire les expressions suivantes :

- $6 + 2x(3 - x)$
- $(6 + 2x)(3 - x)$
- $5(x^2 - 2x - 1)$
- $2x - 5 - 3x(2 + 3x)$
- $4(3 - x)(2x + 6)$
- $6 - 2x(3 - x)$
- $(6 + 2x) - (3 - x)$
- $2x - 5 + 3x(2 + 3x)$
- $2x - 5 + (5x - 3)(2 + 3x)$
- $(2x - 5)(x + 6) - (x - 9)(x + 4)$

Exercice 2 : Avec les identités remarquables.

Déterminer la forme développée de chacune des expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll} A(x) = (x + 9)^2 & B(x) = (x - 9)^2 & C(x) = (x - 9)(x + 9) & D(x) = (2x + 9)^2 \\ E(x) = (2x - 9)^2 & F(x) = (3 - 4x)^2 & G(x) = (3x + 1)(3x - 1) & H(x) = (-2x + 1)^2 \\ I(x) = (-3x - 9)^2 & J(x) = (x + 1)^2 + (x - 1)^2 & K(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2 & L(x) = 3(5x - 6)^2 \\ M(x) = 5 - (3 + 2x)^2 & N(x) = 5(3 - 4x)(3 + 4x) & P(x) = (2x - 1)(9 - x)^2 & \end{array}$$

Capacité 3 : Factoriser une expression littérale.

Méthode : Rechercher un facteur commun. Sinon, utiliser des identités remarquables.

Exercice 1 : Factoriser avec un facteur commun.

- $3x^2 + 9y$
- $6x - x^2$
- $3(x - 4) + 2x(x - 4)$
- $3x(x - 5) + (x - 5)(2x + 6)$
- $x(x + 2) + x$
- $x - 3x^2$
- $3x^2 - 4x + x^3$
- $3(x - 4) - 2x(x - 4)$
- $3x(x - 5) - (x - 5)(2x + 6)$
- $(x - 2) - 5(x - 2)(x + 3)$

Exercice 2 : Factoriser sans facteur commun (donc avec les identités remarquables).

Factoriser les expressions suivantes :

$$A(x) = x^2 - 9 \quad B(x) = 9x^2 - 24x + 16 \quad C(x) = 4x^2 - 81 \quad D(x) = 4x^2 + 20x + 25$$
$$E(x) = (3 - 4x)^2 - 25 \quad F(x) = 25 - (3 - 4x)^2 \quad G(x) = (2x + 1)^2 - (x + 3)^2$$

Capacité 4 : Ecrire une expression littérale sous forme d'un quotient, simplifier un quotient.

Exercice 1 : Ecrire sous forme d'un quotient (on ne s'occupera pas de l'ensemble de définition).

$$A = 1 + \frac{2}{x} \quad B = 2 - \frac{6}{x} \quad C = 1 + \frac{1}{x-3} \quad D = \frac{2}{x+1} - 2 \quad E = \frac{1}{2} + \frac{3}{x}$$
$$F = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} \quad G = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{5}{x} \quad H = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x} \quad I = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} - 1$$

Exercice 2 : Simplifier (si possible) les écritures fractionnaires suivantes.

$$A = \frac{2x+4}{2} \quad B = \frac{3x-6}{2} \quad C = \frac{5x+15}{5} \quad D = \frac{5x+1}{5} \quad E = \frac{4x+8}{2x+6} \quad F = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}}$$
$$G = \frac{\frac{(2x+1)}{2}}{8} \quad H = \frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}-2} \quad I = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x}} \quad J = \frac{1}{\frac{x}{3}} \quad K = \frac{x^2+3x}{4x-x^2} \quad L = \frac{3x^2+1}{x^2+5x}$$

Capacité 5 : Résoudre une équation, une inéquation du premier degré.

Attention à ne pas oublier la conclusion (l'ensemble des solutions) :

Equations : $S = \{...\}$ ou $S = \emptyset$.

Inéquations : $S =]...; ...]$ (un intervalle) ou $S = \emptyset$

Exercice : Résoudre dans \mathbb{R} :

$$2x - 4 = 0 \quad \frac{3}{4}t + 7 = 1 \quad 2(x - 4) = x + 3 \quad t + 4 = t - 5$$
$$7x - 13 \geq 1 \quad x + 1 < -2x \quad -2x + 10 \leq 12x + 150 \quad \frac{x}{2} > 2(x - 1)$$

Capacité 6 : Résoudre une équation.

Méthode :

$$\text{Equation produit nul : } A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

$$\text{Equation de la forme : } x^2 = k$$

Equation du second degré : factoriser pour se ramener à une équation produit.

$$\text{Equation quotient nul : } \frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

$$\text{Produit en croix : } \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C \quad (\text{avec } B \neq 0 \text{ et } D \neq 0)$$

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{cccc} x^2 = 8 & (2x - 5)(3x + 4) = 0 & 8x^2 - 16 = 0 & x^2 = -25 \\ 6x^2 - 2x = 0 & 9 - (2x + 1)^2 = 0 & \frac{1-3x}{x+8} = 0 & \frac{5-2x}{3+3x} = 4 \end{array}$$

Exercice 2 :

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C d'équation $y = x^2 - 2x + 3$ et de la droite (d) d'équation $y = 3x + 3$.
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C d'équation : $y = 2x^2 - 7$ avec l'axe des ordonnées.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C d'équation : $y = 2x^2 - 7$ avec l'axe des abscisses.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes C et C' d'équations respectives :
 $y = \frac{3+x}{x+1}$ et $y = \frac{2+x}{x-5}$ (Utiliser un produit en croix).

Exercice 3 :

Soit $f(x) = (x - 3)^2 - (2x - 5)^2$.

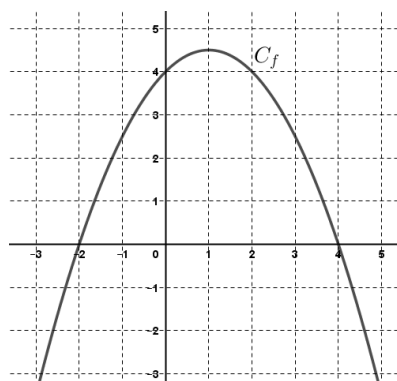
- a. Démontrer que, pour tout x réel, $f(x) = -3x^2 + 14x - 16$
b. Démontrer que, pour tout x réel, $f(x) = (2 - x)(3x - 8)$.
- Quel est le nom de chacune de ces deux formes ?
- En utilisant la forme la plus adaptée :
 - Calculer $f(0)$
 - Résoudre $f(x) = 0$
 - Calculer $f(2)$
 - Résoudre $f(x) = -16$.

Capacité 7 : Lectures graphiques.

Exercice 1 :

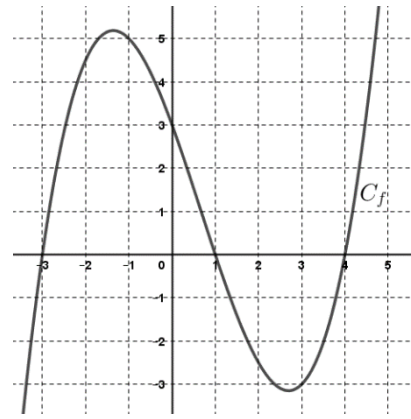
On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3 ; 5]$. Répondre aux questions suivantes en utilisant ce graphique.

- Donner la valeur de $f(0)$.
- Donner l'image de 2 par f .
- Quels sont les antécédents de 2 par f ?
- Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
- Quelles sont les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 4$?
- Dresser le tableau de variation de f .
- Donner le maximum de f .
- Dresser le tableau de signe de f .



Exercice 2 :

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3,5 ; 4,8]$. Répondre aux questions suivantes en utilisant ce graphique.



1. Donner la valeur de $f(0)$.
2. Donner l'image de 3 par f .
3. Quels sont les antécédents de -1 par f ?
4. Quelles sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?
5. Dresser le tableau de variation de f .
6. Dresser le tableau de signe de f .

Exercice 3 : On considère le tableau de variation d'une fonction g :

x	-10	-6	-2	5	12
Variation de g	6	○	-4	3	1

1. Donner 3 exemples de nombres dont les images sont positives.
2. On sait de plus que la fonction s'annule pour $x = -6$ et pour $x = 1$. Dresser alors le tableau de signe de cette fonction.

Capacité 8 : Equations de droites.

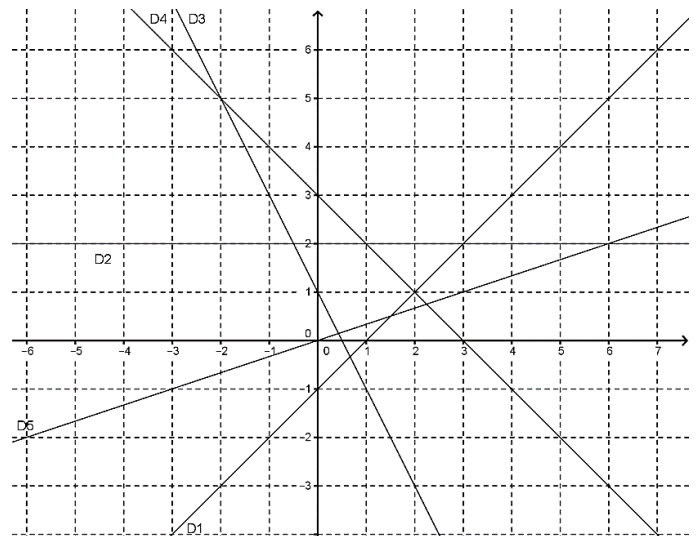
- L'équation réduite d'une droite non verticale est de la forme $y = mx + p$ (m est appelé coefficient directeur, et p ordonnée à l'origine).
- Lire graphiquement le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine d'une droite non verticale.
- Soit d une droite non verticale d'équation $y = mx + p$
Si d passe par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- L'équation d'une droite verticale est de la forme $x = k$.

Exercice 1 :

a) Pour chacune des droites, compléter :

Droite	Coefficient directeur	Ordonnée à l'origine
D1		
D2		
D3		
D4		
D5		

b) En déduire l'équation réduite de chaque droite.



Exercice 2 : Représenter dans un repère orthogonal :

La droite d_1 d'équation : $y = 0,5x + 2$.

La droite d_2 passant par le point $A(3 ; 1)$ et d'ordonnée à l'origine 7.

La droite d_3 passant par le point $B(2 ; -2)$ et de coefficient directeur -1 .

La droite d_4 d'équation : $y = -3x$.

La droite d_5 passant par $D(1 ; 2)$ et de coefficient directeur 0.

La droite d_6 d'équation : $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

La droite d_7 d'équation : $x = -5$.

Exercice 3 :

- On désire déterminer l'équation de la droite passant par les points $A(5 ; 6)$ et $B(7 ; -2)$.
 - Déterminer, par le calcul, le coefficient directeur m de la droite.
 - L'équation de la droite (AB) est alors de la forme $y = \dots x + p$.
 - Remplacer x et y par les coordonnées de A . En déduire la valeur de p .
 - Déterminer alors l'équation de la droite (AB) .
- Déterminer l'équation de la droite passant par les points $M(-5 ; -14)$ et $N(1 ; 4)$.
- Le point $R(10 ; 31)$ appartient-il à une de ces deux droites ?

Capacité 9 : Etudier le signe d'une fonction.
--

Exercice : Dresser le tableau de signe des fonctions suivantes :

1. $g(x) = -2x + 3$

$h(x) = x + 5$

2. $f(x) = (2x + 1)(x - 3)$

$j(x) = (-2x + 6)(3 + x)$

$k(x) = 4x^2 - 3x$

(Penser à factoriser)

3. $l(x) = \frac{2x+1}{2-x}$

$m(x) = \frac{1-3x}{-1-x}$

$n(x) = 1 - \frac{1}{x}$

(Attention à la valeur interdite)

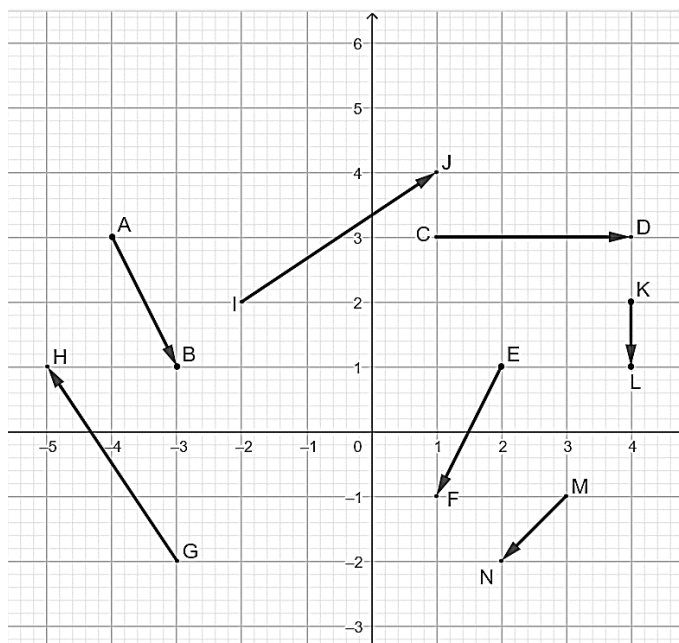
(Ecrire sous forme d'un quotient)

Capacité 10 : Les vecteurs.

- Lire les coordonnées d'un vecteur.
- Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur.
 Considérons les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Relation de Chasles : Soient $A, B,$ et C trois points du plan : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- Déterminant de deux vecteurs.
 On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$.
- Colinéarité de deux vecteurs.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exercice 1 : Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Lire, dans le repère ci-contre, les coordonnées des vecteurs représentés :



2. Dans un repère, on considère les points $A(2 ; 1)$, $B(3 ; -4)$ et $C(2 ; 0)$.
 On veut placer un point $M(x ; y)$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- a. Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
 - b. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
 - c. Exprimer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AM} en fonction de x et de y .
 - d. Déterminer alors les coordonnées de M .
3. Dans un repère, on considère les points $A(3 ; -1)$, $B(0 ; 5)$ et $C(-4 ; 1)$.
 On veut placer un point $M(x ; y)$ tel que : $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$.
- a. Calculer les coordonnées de $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$.
 - b. Exprimer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{BM} en fonction de x et de y .
 - c. Déterminer alors les coordonnées du point M .

Exercice 2 : Simplifier, au maximum, les expressions suivantes en utilisant la relation de Chasles :

Soient R, S, T, U et V des points du plan.

1. $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TU}$
2. $\overrightarrow{TU} + \overrightarrow{US}$
3. $\overrightarrow{TU} + \overrightarrow{VT}$
4. $\overrightarrow{TU} - \overrightarrow{TU}$
5. $\overrightarrow{TU} + \overrightarrow{US} + \overrightarrow{SR}$

Exercice 3 : Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

1. Dire si les vecteurs suivants sont (ou ne sont pas) colinéaires.
 - a. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -27 \end{pmatrix}$.
 - b. $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. On considère les points suivants : $R(-4 ; 1)$, $S(3 ; -2)$, $T(5 ; 7)$ et $U(13,4 ; 3,4)$.
Les droites (RS) et (TU) sont-elles parallèles ?
3. On considère les points suivants : $R(-4 ; 1)$, $S(-1 ; -2)$ et $T(5 ; -5)$.
Les points R , S et T sont-ils alignés ?
4. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ z \end{pmatrix}$.
Pour quelle valeur du réel z , ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?
5. On considère les points suivants : $R(-4 ; 1)$, $S(-1 ; -2)$ et $T(w ; -5)$.
Pour quelle valeur du réel w , ces points sont-ils alignés ?