

Corrigé

Partie 1 : Calcul littéral, équations et inéquations

EX 1.1 Factoriser

$$A = -2x^4 + 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(-x^2 + 2x - 3)$$

$$B = (x - 5)^2 - 4 = (x - 5)^2 - 2^2 = [(x - 5) - 2][(x - 5) + 2] = (x - 7)(x - 3)$$

$$C = 2xe^x + (x^2 - 6)e^x = (2x + (x^2 - 6))e^x = (x^2 + 2x - 6)e^x$$

$$D = e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t} = (1 - 0,5t)e^{-0,5t}$$

$$E = e^{2x} - 3e^x = e^x \times e^x - 3 \times e^x = (e^x - 3)e^x$$

$$F = e^{2t} - 1 = (e^t)^2 - 1^2 = (e^t - 1)(e^t + 1)$$

EX 1.2 Calcul littéral

$$A = \frac{8}{x} - \frac{1+8x}{x^2} = \frac{8x}{x^2} - \frac{1+8x}{x^2} = \frac{8x-1-8x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$B = 1 - 2x + \frac{2x^3 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(1 - 2x)(x^2 + 1) + 2x^3 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x^3 - 2x + 2x^3 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{x(x - 2)}{x^2 + 1}$$

$$C = \frac{-1}{x+3} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{-1 \times (x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{-x+3}{x^2-9} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{-x+3-3}{x^2-9} = \frac{-x}{x^2-9}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1 \times \sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

$$E = (e^x)^2 - \frac{1}{2}e^{2x} = e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F = \frac{1}{\frac{7^{n+3}}{7^{n+1}}} = \frac{1}{7^{n+3}} \times \frac{7^{n+1}}{1} = \frac{7^{n+1}}{7^{n+3}} = 7^{n+1-n-3} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$G = \frac{3^{2(n+1)-1}}{3^{2n-1}} = \frac{3^{2n+2-1}}{3^{2n-1}} = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}} = 3^{2n+1-2n+1} = 3^2 = 9$$

EX 1.3 Résoudre une équation du second degré

1) $2x^2 - x - 3 = 0$

$a = 2 ; b = -1 ; c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25 \quad \Delta > 0$ donc il y a deux solutions distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{1-5}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{cases} \quad \text{D'où } S = \{-1 ; 1,5\}$$

Autre méthode possible : On remarque que $2 \times (-1)^2 - (-1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$ donc $x_1 = -1$ est racine. Ensuite la formule $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donne $-1 \times x_2 = -\frac{3}{2}$ et ainsi $x_2 = \frac{3}{2} = 1,5$.

2) $-2x^2 - 2x + 24 = 0$

$a = -2; b = -2; c = 24$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 24 = 4 + 192 = 196$ $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{196}}{2 \times (-2)} = \frac{2 - 14}{-4} = -\frac{12}{-4} = 3 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{196}}{2 \times (-2)} = \frac{2 + 14}{-4} = \frac{16}{-4} = -4 \end{cases} \quad \text{D'où } S = \{-4; 3\}$$

3) $12x^2 + 5x - 2 = 0$

$a = 12; b = 5; c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 12 \times (-2) = 121$ $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions distinctes :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{121}}{2 \times 12} = \frac{-5 - 11}{24} = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 11}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{D'où } S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right\}$$

4) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$

$a = -9; b = 6; c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-9) \times (-1) = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0$ donc il y a une solution unique : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-18} = \frac{1}{3}$. D'où $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

5) $7x^2 + x + 2 = 0$

$a = 7; b = 1; c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 7 \times 2 = -55$

$\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution. $S = \emptyset$

6) $5x^2 - 3x = 0$

$x(5x - 3) = 0$

$x = 0$ ou $5x - 3 = 0$

$x = 0$ ou $x = \frac{3}{5} = 0,6$

$S = \{0; 0,6\}$

7) $4x^2 - 1 = 0$

$4x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ ou $x = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

8) $3x^2 + 2 = 0$

$3x^2 = -2$

$x^2 = -\frac{2}{3}$

Cette équation n'a pas de solution puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. $S = \emptyset$

EX 1.4 Résoudre une équation avec exponentielle

1) L'équation $e^x = 0$ n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

Donc $S = \emptyset$

2) $(x + 1)e^x = 0$

$x + 1 = 0$ ou $e^x = 0$

$x = -1$ ou $e^x = 0$

Donc $S = \{-1\}$

3) $(x^2 + x + 1)e^x = 0$

$x^2 + x + 1 = 0$ ou $e^x = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$

$\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution

Donc $S = \emptyset$

4) $e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$e^x = e^0$

$x = 0$

$S = \{0\}$

5) $e^{-0,2x} - 1 = 0$

$e^{-0,2x} = 1$

$e^{-0,2x} = e^0$

$-0,2x = 0$

$x = 0$

$S = \{0\}$

6) $e^{2x+1} = 1$

$e^{2x+1} = e^0$

$2x + 1 = 0$

$2x = -1$

$x = -\frac{1}{2}$

$S = \{-\frac{1}{2}\}$

7) $e^{-3x+2} - 1 = 0$

$e^{-3x+2} = 1$

$e^{-3x+2} = e^0$

$-3x + 2 = 0$

$-3x = -2$

$x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

$S = \{\frac{2}{3}\}$

8) $e^{0,5x} = e^{x+3}$

$0,5x = x + 3$

$0,5x - x = 3$

$-0,5x = 3$

$x = \frac{3}{-0,5} = -6$

$S = \{-6\}$

EX 1.5 Résoudre une inéquation du second degré

1) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

$\Delta = \dots = 49$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines $x_1 = \dots = -3$ et $x_2 = 0,5$

x	$-\infty$	-3	$0,5$	$+\infty$	
signe de $2x^2 + 5x - 3$	+	\emptyset	-	\emptyset	+

$S =]-\infty; -3] \cup [0,5; +\infty[$

2) $-x^2 + x - 2 > 0$

$\Delta = \dots = -7$

$\Delta < 0$ donc il n'y a pas de racine.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $-x^2 + x - 2$	-	

$S = \emptyset$

3) $25x^2 - 40x + 16 \leq 0$

$\Delta = \dots = 0$ donc il y a une racine unique $x_0 = \dots = \frac{4}{5}$

x	$-\infty$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
signe de $25x^2 - 40x + 16$	+	0	+

$$S = \left\{ \frac{4}{5} \right\}$$

EX 1.6 Résoudre une inéquation avec exponentielle

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des inéquations suivantes :

1) $e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq 1$

$e^x \geq e^0$

$x \geq 0$

$S = [0 ; +\infty[$

3) $-e^{-0,5x} - 2 \geq 0$

$-e^{-0,5x} \geq 2$

$e^{-0,5x} \leq -2$

$S = \emptyset$ car $e^{-0,5x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) $-e^{-4t} + 1 > 0$

$-e^{-4t} > -1$

$e^{-4t} < 1$

$e^{-4t} < e^0$

$-4t < 0$

$t > 0$

$S =]0 ; +\infty[$

4) $1 + e^{-3t-5} > 0$

$e^{-3t-5} > -1$

$S = \mathbb{R}$ car $e^{-3t-5} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On divise les deux membres par -4 qui est négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Partie 2 : Suites

EX 2.1 Calcul de termes

1) La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

Pour calculer u_1 , on doit remplacer n par 0 : $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 - 2 = 3 \times \frac{2}{3} - 2 = 2 - 2 = 0$

Pour calculer u_2 , on remplace n par 1 : $u_2 = u_{1+1} = 3u_1 - 2 = 3 \times 0 - 2 = -2$

2) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2u_n+4}$.

Même remarque sur les indices :

$$u_1 = \frac{1+u_0}{2u_0+4} = \frac{1+1}{2 \times 1+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1+u_1}{2u_1+4} = \frac{1+\frac{1}{3}}{2 \times \frac{1}{3}+4} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}+4} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{14}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

3) La suite (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -u_n + n$.

Pour $n = 0$: $u_1 = -u_0 + 0 = -(-1) + 0 = 1$

Pour $n = 1$: $u_2 = -u_1 + 1 = -1 + 1 = 0$

4) La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{4}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

On sait que $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier n , la suite étant arithmétique.

On a alors $u_1 = u_0 - \frac{4}{3} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ et $u_2 = u_1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

5) La suite (u_n) est géométrique de raison $q = -\frac{4}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

On sait que $u_{n+1} = u_n \times q$ pour tout entier n , la suite étant géométrique.

$$\text{Donc } u_1 = u_0 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

$$\text{De même : } u_2 = u_1 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}$$

EX 2.2 Etudier le sens de variation d'une suite

1) Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = (-3(n+1) - 4) - (-3n - 4) = -3n - 7 + 3n + 4 = -3$

On a donc $u_{n+1} - u_n < 0$. D'où la suite est **strictement décroissante**.

Remarque : en fait, comme $u_{n+1} - u_n$ est constant, on peut en déduire également que la suite est arithmétique, de raison -3 .

2) La suite est à termes strictement positifs. On peut donc s'intéresser au critère sur la comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

$$\text{On a pour tout entier naturel } n, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5} < 1.$$

Donc (v_n) est une suite **strictement décroissante**.

3) On a $w_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en posant $f(x) = \frac{2x+1}{3+2x}$.

Alors (w_n) a les mêmes variations que f sur $[0; +\infty[$.

On peut alors dériver f pour connaître son sens de variation :

$$f'(x) = \frac{2(3+2x) - 2(2x+1)}{(3+2x)^2} = \frac{4}{(3+2x)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

(w_n) est donc **strictement croissante**.

4) La suite est à termes strictement positifs. On peut donc s'intéresser au critère sur la comparaison de $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ à 1.

$$\text{On a pour tout entier naturel } n, \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3 > 1.$$

Donc (t_n) est une suite **strictement croissante**.

5) On a $z_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en posant $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Alors (z_n) a les mêmes variations que f sur $[0; +\infty[$.

On peut alors dériver f pour connaître son sens de variation :

$$f'(x) = 6x + 2 \text{ qui est positive sur } [0; +\infty[.$$

Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

(z_n) est donc **strictement croissante**.

$$6) \text{ On a } a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n+1} - 1 + \frac{2}{n} = -\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} = \frac{(-2n+2(n+1))}{n(n+1)} = \frac{-2n+2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, ce quotient est strictement positif. Donc $a_{n+1} - a_n > 0$.

D'où (a_n) est **strictement croissante**.

EX 2.3 Suites arithmétiques

1)(a) On a $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}(n+1) + 4\right) - \left(-\frac{1}{2}n + 4\right) = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2}n - 4 = -\frac{1}{2}$: cette différence étant constante (indépendante de n), la suite est **arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$** .

Son premier terme est $u_0 = -\frac{1}{2} \times 0 + 4 = 4$ et le terme général est donné par l'énoncé.

(b) On calcule les premiers termes (la suite n'étant pas de la forme $an + b$, on peut conjecturer qu'elle n'est pas arithmétique) :

$$v_0 = 1,$$

$$v_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0,$$

$$v_2 = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3.$$

$$\text{Donc } v_1 - v_0 = -1 \text{ et } v_2 - v_1 = 3$$

On voit donc que $v_{n+1} - v_n$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique.

(c) On calcule les premiers termes (la suite n'étant pas de la forme $an + b$, on peut conjecturer qu'elle n'est pas arithmétique) :

$$w_0 = \frac{5}{1} = 5,$$

$$w_1 = \frac{5}{1+2 \times 1} = \frac{5}{3},$$

$$w_2 = \frac{5}{1+2 \times 2} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{Donc } w_1 - w_0 = \frac{5}{3} - 5 = -\frac{10}{3} \text{ et } w_2 - w_1 = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

On voit donc que $w_{n+1} - w_n$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique.

(d) On calcule les premiers termes (la suite n'étant pas de la forme $an + b$, on peut conjecturer qu'elle n'est pas arithmétique) :

$$t_0 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$t_1 = 3^1 - 1 = 2,$$

$$t_2 = 3^2 - 1 = 8$$

$$\text{Donc } t_1 - t_0 = 2 \text{ et } t_2 - t_1 = 6$$

On voit donc que $t_{n+1} - t_n$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas arithmétique.

2) (a) $u_n = u_0 + nr = 3 + nr$

(b) Or $u_{34} = 343$ donc $343 = 3 + 34r$ d'où $34r = 340$

et donc $r = \frac{340}{34} = 10$

$$u_n = u_0 + nr = 3 + nr = 3 + 10n$$

et donc $u_{100} = 3 + 10 \times 100 = 1003$

EX 2.4 Suites géométriques

1)

(a) On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 1 - 3 \times 0^2 = 1,$$

$$u_1 = 1 - 3 \times 1^2 = -2$$

$$u_2 = 1 - 3 \times 2^2 = 1 - 12 = -11$$

$$\text{Donc } \frac{u_2}{u_1} = \frac{11}{-2} \text{ et } \frac{u_1}{u_0} = -2$$

On voit donc que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas géométrique.

(b) On calcule les premiers termes :

$$v_0 = 5 \times 0 + 2 = 2,$$

$$v_1 = 5 \times 1 + 2 = 7$$

$$v_2 = 5 \times 2 + 2 = 12$$

$$\text{Donc } \frac{v_2}{v_1} = \frac{12}{7} \text{ et } \frac{v_1}{v_0} = \frac{7}{2}$$

On voit donc que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ n'est pas constante, donc la suite n'est pas géométrique.

(c) On a pour tout entier n , $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{4 \times 6^{n+1}}{4 \times 6^n} = 6^{(n+1)-n} = 6$: ce quotient étant constant (indépendant de n), la suite est **géométrique de raison 6**.

Son premier terme est $w_0 = 4 \times 6^0 = 4$ et le terme général est donné par l'énoncé.

(d) On a pour tout entier n , $\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{7}{8^{2(n+1)+3}}}{\frac{7}{8^{2n+3}}} = \frac{7}{8^{2n+3}} \times \frac{8^{2n+3}}{7} = \frac{8^{2n+3}}{8^{2n+3}} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$:

Ce quotient étant constant (indépendant de n), la suite est **géométrique de raison $\frac{1}{64}$** .

Son premier terme est $t_0 = \frac{7}{8^{2 \times 0 + 3}} = \frac{7}{8^3}$ et le terme général est donné par l'énoncé.

2) (a) Soit n un entier naturel. Montrons qu'il existe un réel k tel que $v_{n+1} = k \times v_n$

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2v_n$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de **raison -2** et de premier terme **$v_0 = u_0 - 1 = 4$**

(b) D'où $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times (-2)^n$.

(c) Or $v_n = u_n - 1$. Donc $u_n = v_n + 1 = 4 \times (-2)^n + 1$

EX 2.5 Calcul de somme

1) On veut calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{11} = \frac{u_0 + u_{11}}{2} \times 12$

Or $u_{11} = u_0 + 11 \times r = 5 + 11 \times (-2) = 5 - 22 = -17$

Donc $S = \frac{5-17}{2} \times 12 = -\frac{12}{2} \times 12 = -6 \times 12 = -72$

2) $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{22} = v_0 \times \frac{1-q^{23}}{1-q} = 2 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{23}}{1-(\frac{1}{2})} = 2 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{23}}{\frac{1}{2}} = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{23}\right)$

3) On reconnaît la somme des termes consécutifs de la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 8$.

On a besoin de savoir de combien de termes il s'agit. Le terme général de la suite est $u_n = 8 + 4n$. Le dernier terme de cette somme est 224. On a donc $224 = 8 + 4n$. Donc $4n = 216$ et $n = 54$.

Alors $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{54} = 55 \times \frac{u_0 + u_{54}}{2} = 55 \times \frac{8+224}{2} = 6380$

4) On reconnaît la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 3$.

On a besoin de savoir de combien de termes il s'agit. Le terme général de la suite est $u_n = 3 \times (-2)^n$. Le dernier terme de cette somme est 3072. On a donc $3072 = 3 \times (-2)^n$. Donc (à l'aide de la calculatrice et par tâtonnements ou en affichant le tableau des termes de la suite) : $n = 10$.

Alors $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = 3 \times \frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = 3 \times \frac{2049}{3} = 2049$

5) On reconnaît la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison x^2 et de premier terme 1.

On a besoin de savoir de combien de termes il s'agit. Le terme général de la suite est $u_k = 1 \times (x^2)^k = x^{2k}$. Le dernier terme de cette somme est x^{2n} . On a donc $x^{2n} = x^{2k}$. Donc $n = k$: le dernier terme est d'indice k et il y a $n + 1$ termes dans cette somme (de u_0 à u_n : $n + 1$ termes).

Alors $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-(x^2)} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$

Partie 3 : Fonctions

EX 3.1 Calcul de dérivée (sans exponentielle)

- 1) $f(x) = -2x^2 + 5x + 1 \Rightarrow f'(x) = -4x + 5$
- 2) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 8x - 1$
- 3) $f(x) = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- 4) $f(x) = \frac{6}{x^3} = 6 \times \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = 6 \times \frac{-3}{x^4} = -\frac{18}{x^4}$
- 5) $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u = x - 1 & u' = 1 \\ v = 2x + 3 & v' = 2 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x+3) - (x-1) \times 2}{(2x+3)^2} = \frac{2x+3-2x+2}{(2x+3)^2} = \frac{5}{(2x+3)^2}$$

- 6) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$
- f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u = 2x - 5 & u' = 2 \\ v = x^2 + 1 & v' = 2x \end{cases}$
- $$f'(x) = \frac{2 \times (x^2+1) - (2x-5) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2+10x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+10x+2}{(x^2+1)^2}$$

- 7) $f(x) = (3x + 1)\sqrt{x}$

f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = 3x + 1 & u' = 3 \\ v = \sqrt{x} & v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$$f'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (3x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{3x + 1}{2\sqrt{x}}$$

On peut simplifier le résultat précédent en réduisant au même dénominateur :

$$3\sqrt{x} + \frac{3x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{3x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x}{2\sqrt{x}} + \frac{3x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x + 3x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x + 1}{2\sqrt{x}}$$

D'où :

$$f'(x) = \frac{9x + 1}{2\sqrt{x}}$$

EX 3.2 Calcul de dérivée (avec exponentielle)

Dans chaque cas, calculer $f'(x)$.

- 1) $f(x) = 8e^x - 2x \Rightarrow f'(x) = 8e^x - 2$
- 2) $f(x) = e^{2x+3} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x+3}$
- 3) $f(x) = 4e^{0,25x} \Rightarrow f'(x) = 4 \times 0,25 \times e^{0,25x} = 1 \times e^{0,25x} = e^{0,25x}$
- 4) $f(x) = (5x - 3)e^x$

f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = 5x - 3 & u' = 5 \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$

$$f'(x) = 5e^x + (5x - 3)e^x$$

Pour simplifier le résultat, on factorise ensuite par e^x :

$$f'(x) = (5 + 5x - 3)e^x = (5x + 2)e^x.$$

- 5) $f(x) = (x + 2)e^{0,5x}$

f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = x + 2 & u' = 1 \\ v = e^{0,5x} & v' = 0,5e^{0,5x} \end{cases}$

$$f'(x) = 1 \times e^{0,5x} + (x + 2) \times 0,5e^{0,5x}$$

Pour simplifier le résultat, on factorise ensuite par $e^{0,5x}$:

$$f'(x) = (1 + (x + 2) \times 0,5)e^{0,5x} = (1 + 0,5x + 1)e^{0,5x} = (0,5x + 2)e^{0,5x}.$$

$$6) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

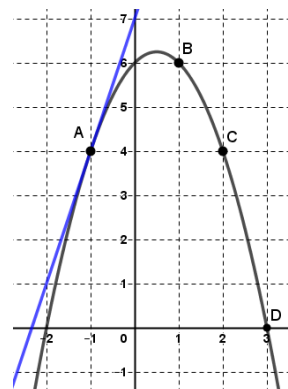
f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u = e^x - 1 & u' = e^x \\ v = e^x + 1 & v' = e^x \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

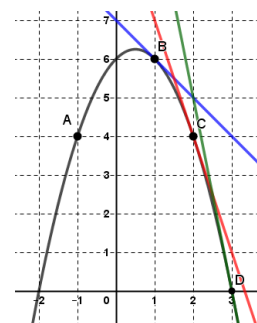
EX 3.3 Nombres dérivés et tangentes à une courbe

$$f(x) = -x^2 + x + 6 \Rightarrow f'(x) = -2x + 1$$

- 1) A est la point de C_f d'abscisse -1 donc le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A est égal à $f'(-1) = -2 \times (-1) + 1 = 3$.



- 2) Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point B est $f'(1) = -2 \times 1 + 1 = -1$.
 Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point C est $f'(2) = -2 \times 2 + 1 = -3$.
 Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point D est $f'(3) = -2 \times 3 + 1 = -5$.



EX 3.4 Nombres dérivés et tangentes à une courbe

Abscisse du point →	x	-2	0	3
Ordonnée du point →	$f(x)$	3	2	4
Coefficient directeur de la tangente en ce point →	$f'(x)$	-1	0,5	0

EX 3.5 Equation de tangente

- 1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 1 = 6x^2 - 10x + 1$
 2) L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 est donnée par la formule

$$y = f'(1) \times (x - 1) + f(1)$$

Or $f'(1) = 6 \times 1^2 - 10 \times 1 + 1 = -3$ et $f(1) = 2 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 1 = -2$.

D'où :

$$y = -3(x - 1) - 2$$

$$y = -3x + 3 - 2$$

$$y = -3x + 1$$

EX 3.6 Equation de tangente

$$f(x) = (2x + 1)e^x$$

- 1) f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = 2x + 1 & u' = 2 \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$

$$f'(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = (2 + 2x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$$

2) L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Or $f'(0) = (2 \times 0 + 3)e^0 = 3$ et $f(0) = (2 \times 0 + 1)e^0 = 1$

Donc :

$$y = 3x + 1$$

EX 3.7 Etude des variations

1) $f(x) = x^2 + x$ sur \mathbb{R}

$$f'(x) = 2x + 1$$

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

$ax + b$ est du signe de a à droite de la racine.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

2) $f(x) = x - 2x^2$ sur \mathbb{R}

$$f'(x) = 1 - 2 \times 2x = 1 - 4x$$

$$1 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

$ax + b$ est du signe de a à droite de la racine.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4} - \frac{2}{16} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x - 1$ sur \mathbb{R}

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 6 = x^2 + x - 6$$

Les racines de $x^2 + x - 6$ sont -3 et 2 car $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ donc $\begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \end{cases}$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines.

$$f(-3) = \dots = 12,5$$

$$f(2) = \dots = -\frac{25}{3}$$

4) $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 4$ sur \mathbb{R}

$f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$

L'équation $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ n'a pas de solution car $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = -8 < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	↘	

$a < 0$ et $\Delta < 0$ donc :

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines éventuelles.

5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$ sur \mathbb{R}

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

L'équation $3x^2 - 6x + 3 = 0$ a pour unique solution $x_0 = 1$ car $\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0 \\ \text{donc } x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{6} = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf en a où le trinôme s'annule.

6) $f(x) = x^3 + x^2$ sur \mathbb{R}

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

Pour résoudre $3x^2 + 2x = 0$ on peut calculer Δ mais il y a plus simple ici :

$3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗ $\frac{4}{27}$ ↘ 0 ↗				

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines éventuelles.

7) $f(x) = -x^4 - 3x^2$ sur \mathbb{R}

$f'(x) = -4x^3 - 6x$

Remarque : Nous ne savons pas, en général, étudier le signe d'une fonction polynôme du 3^{ème} degré. C'est pourquoi, grâce à une factorisation, nous allons nous ramener à l'étude du signe du produit d'une fonction affine par une fonction polynôme du second degré.

$f'(x) = -4x^3 - 6x = x(-4x^2 - 6)$

Le facteur $-4x^2 - 6$ est clairement négatif, en effet : $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 6 \leq -6 < 0$

(Nous aurions aussi pu calculer le discriminant Δ , qui est négatif donc le trinôme est du signe de a ; c'est à dire strictement négatif)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$-4x^2-6$	-	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$ 		

$f(0) = -0^4 - 3 \times 0^2 = 0$

8) $f(x) = x^4 - 3x^2$ sur \mathbb{R}

$f'(x) = 4x^3 - 6x = x(4x^2 - 6)$

Recherche du signe du trinôme $4x^2 - 6$: (On aurait pu calculer Δ mais il y a plus simple ici)

Réolvons $4x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{6}{4} = 1,5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{1,5}$ ou $x = \sqrt{1,5}$

Notons $x_1 = -\sqrt{1,5}$ et $x_2 = \sqrt{1,5}$.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$4x^2-6$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$					

9) $f(x) = \frac{5x-4}{2-3x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

$f(x) = \frac{u}{v}$ donc $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = 5x - 4$; $u' = 5$; $v = 2 - 3x$; $v' = -3$

D'où $f'(x) = \frac{5 \times (2-3x) - (-3) \times (5x-4)}{(2-3x)^2} = \frac{5 \times (2-3x) + 3 \times (5x-4)}{(2-3x)^2} = \frac{10 - 15x + 15x - 12}{(2-3x)^2} = \frac{-2}{(2-3x)^2}$

$(2 - 3x)^2 > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ donc $f'(x)$ est du signe de -2 . Ainsi $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

Donc f est strictement décroissante sur $] -\infty ; \frac{2}{3} [$ et sur $] \frac{2}{3} ; +\infty [$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	↘		↘

10) $f(x) = 4x - \frac{5}{x}$ sur \mathbb{R}^*

$f(x) = 4x - \frac{5}{x}$ définie et dérivable sur $] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$.

$f'(x) = 4 - 5 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 4 + \frac{5}{x^2} > 0$ sur \mathbb{R}^* car $x^2 > 0$ sur \mathbb{R}^* .

donc f est strictement croissante sur $] -\infty ; 0 [$ et sur $] 0 ; +\infty [$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗		↗

11) $f(x) = -4x - \frac{5}{x}$ sur \mathbb{R}^*

$f(x) = -4x - \frac{5}{x}$ définie et dérivable sur $] -\infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$.

$f'(x) = -4 - 5 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -4 + \frac{5}{x^2} = \frac{-4x^2 + 5}{x^2}$. Comme $x^2 > 0$ sur \mathbb{R}^* , $f'(x)$ est du signe de $-4x^2 + 5$.

Pour résoudre $-4x^2 + 5 = 0$ on peut calculer Δ mais il y a plus simple ici :

$$-4x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Notons $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
$f(x)$	↘			$f(x_2)$	↘	
		$f(x_1)$				

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a partout sauf entre ses racines éventuelles. Ici $a = -4 < 0$.

EX 3.8 Etude des variations

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right)e^x$.

1) f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = \frac{1}{2}x^2 - 4 & u' = \frac{1}{2} \times 2x = x \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$

$$f'(x) = xe^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right)e^x = \left(x + \frac{1}{2}x^2 - 4\right)e^x$$

$$D' \text{ où } f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right)e^x$$

2) Les racines de $\frac{1}{2}x^2 + x - 4$ sont -4 et 2 en effet : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-4) = 9 > 0$

$$\text{Donc } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{-1 - 3}{1} = -4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{1} = 2$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
signe de $\frac{1}{2}x^2 + x - 4$	+	0	-	0	+
signe de e^x	+		+		+
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
variations de f					

$$f(-4) = \left(\frac{1}{2}(-4)^2 - 4\right)e^{-4} = \left(\frac{1}{2} \times 16 - 4\right)e^{-4} = (8 - 4)e^{-4} = 4e^{-4} \approx 0,07$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{2} \times 2^2 - 4\right)e^2 = (2 - 4)e^2 = -2e^2 \approx -14,78$$

EX 3.9 Etude des variations

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u = e^x - 1 & u' = e^x \\ v = e^x + 1 & v' = e^x \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $\frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

EX 3.10 Etude des variations

$$f(t) = -2te^{-0,5t}.$$

1) f est de la forme $u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u = -2t & u' = -2 \\ v = e^{-0,5t} & v' = -0,5e^{-0,5t} \end{cases}$
 $f'(t) = -2e^{-0,5t} + (-2t) \times (-0,5e^{-0,5t}) = -2e^{-0,5t} + te^{-0,5t} = (t-2)e^{-0,5t}$.

2) $t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

t	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $t - 2$	$-$	0	$+$
signe de $e^{-0,5t}$	$+$		$+$
signe de $f'(t)$	$-$	0	$+$
variations de f			

$$f(2) = -2 \times 2 \times e^{-0,5 \times 2} = -4e^{-1} \approx -1,47$$

EX 3.11 Etude des variations

1) $1 - e^{3x} = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = 1 \Leftrightarrow e^{3x} = e^0 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $1 - e^{3x} > 0 \Leftrightarrow e^{3x} < 1 \Leftrightarrow e^{3x} < e^0 \Leftrightarrow 3x < 0 \Leftrightarrow x < 0$
 D'où le tableau de signe de $1 - e^{3x}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $1 - e^{3x}$	$+$	0	$-$

2) $f(x) = 3x - e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3 - 3e^{3x} = 3(1 - e^{3x})$

On remarque que $f'(x)$ est du signe $1 - e^{3x}$ puisque 3 est positif !
 En utilisant la question 1) on obtient :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
variations de f			

$$f(0) = 3 \times 0 - e^{3 \times 0} = -e^0 = -1$$

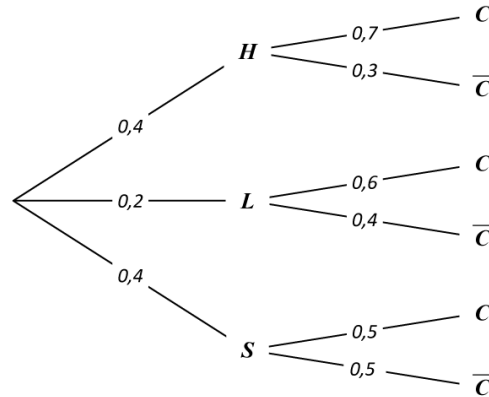
Partie 4 : Probabilités

EX 4.1

Il y a deux questions sur l'Histoire, une sur la Littérature et deux sur les Sciences, on a ainsi :

$$p(H) = p(S) = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ et } p(L) = \frac{1}{5} = 0,2 .$$

1. L'arbre de probabilité associé est :



2. $p(H \cap C) = p(H) \times p_H(C) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$
3. $p(C) = p(H \cap C) + p(L \cap C) + p(S \cap C) = 0,28 + 0,2 \times 0,6 + 0,4 \times 0,5 = 0,6$
4. D'une part $p(H \cap C) = 0,28$ et d'autre part $p(H) \times p(C) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.
 $p(H) \times p(C) \neq p(H \cap C)$ donc **H et C ne sont pas indépendants.**
5. La probabilité cherchée est une probabilité conditionnelle : $p_C(S) = \frac{p(S \cap C)}{p(C)} = \frac{0,4 \times 0,5}{0,60} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3} \approx 0,333$.

EX 4.2

1. Pour trouver les valeurs prises par X , on dresse le tableau suivant :

x \ y	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Les événements (x, y) sont équiprobables donc $P(x, y) = \frac{1}{36}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
Évènements	Obtenir (1;1), (2;2) ; (3;3) ; (4;4), (5;5), (6;6)	Obtenir (1;2), (2;1), (2;3), (3;2), (3;4), (4;3), (4;5) , (5;4), (5;6), (6;5)	Obtenir (1;3), (3;1), (2;4), (4;2), (3;5), (5;3), (4;6) , (6;4)	Obtenir (1;4), (4;1), (2;5), (5;2), (3;6), (6;3)	Obtenir (1;5), (5;1), (2;6), (6;2)	Obtenir (1;6), (6;1),
$P(X = x_i)$	$6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$	$10 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$	$8 \times \frac{1}{36} = \frac{2}{9}$	$6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$	$4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$	$2 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{18} = \frac{35}{18} \approx 1,94$$

$$V(X) = \left(0 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(1 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{5}{18} + \left(2 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{2}{9} + \left(3 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(4 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{1}{9} + \left(5 - \frac{35}{18}\right)^2 \times \frac{1}{18}$$

$$V(X) = \frac{665}{324} \approx 2,05$$

EX 4.3

On dispose d'une roue qui comporte dix secteurs identiques, neuf verts et un rouge. On propose les deux jeux suivants :

- Jeu 1 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur gagne 2 000 €, sinon il perd 8 000 €.
 - Jeu 2 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur ne gagne ni ne perd rien, sinon, il gagne 10 000 €.
1. Intuitivement, il semble que le jeu 1 est le plus avantageux car il y a plus de secteurs verts et donc on gagnera 2 000€ facilement.

2. Jeu 1 :

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain (algébrique) obtenu au jeu 1.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	2 000	-8 000
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{10} = 0,9$	$\frac{1}{10} = 0,1$

$$E(X) = 2\,000 \times 0,9 + (-8\,000) \times 0,1 = 1\,000.$$

$$V(X) = (2\,000 - 1\,000)^2 \times 0,9 + (-8\,000 - 1\,000)^2 \times 0,1 = 9\,000\,000 \text{ et}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{9\,000\,000} = 3\,000$$

Soit Y la variable aléatoire correspondant au gain (algébrique) obtenu au jeu 2.

La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant

y_i	0	10 000
$P(Y = y_i)$	$\frac{9}{10} = 0,9$	$\frac{1}{10} = 0,1$

$$E(Y) = 0 \times 0,9 + (10\,000) \times 0,1 = 1\,000.$$

$$V(Y) = (0 - 1\,000)^2 \times 0,9 + (10\,000 - 1\,000)^2 \times 0,1 = 9\,000\,000 \text{ et } \sigma(Y) = \sqrt{9\,000\,000} = 3\,000$$

Conclusion : Pour chaque jeu, le joueur a une espérance de gain identique de 1 000 € et un écart-type des gains possibles identique (3000 €). On peut donc considérer que ces deux jeux sont équivalents.